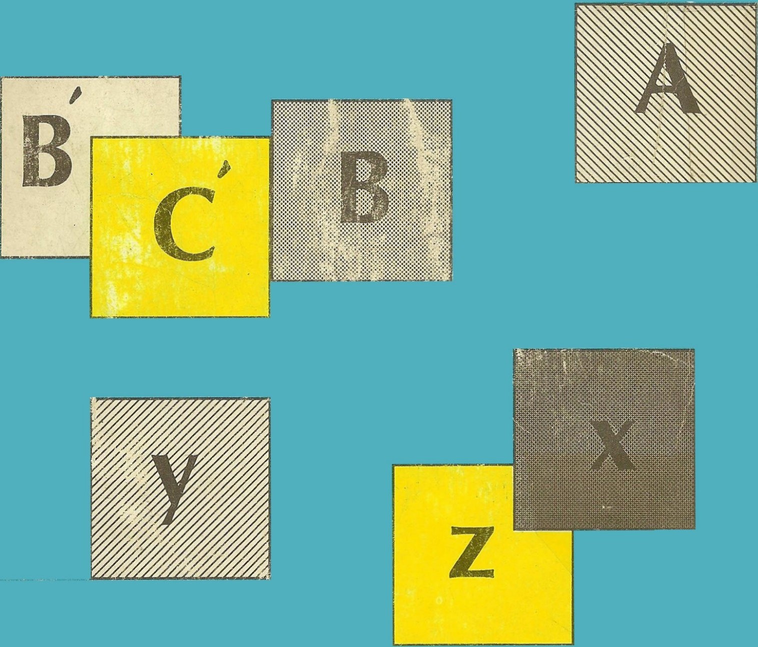
نابرابری‌ها

تألیف پرویز شهریاری



نابرابری ها

نوشتهٔ

پرویز شهریاری

تهران، ۱۳۷۲

انتشارات فردوس: خیابان مجاهدین اسلام، شمارهٔ ۲۶۲ تلفن: ۳۱۲۴۵۳۳

انتشارات مجید: ده‌متری ثقفی، شمارهٔ ۲۸ تلفن: ۵۴۴۸۵۹

نابرابری ها

پرویز شهریاری

امور فنی: حسن نیک‌بخت

چاپ اول، ۱۳۷۲

چاپ: چاپخانه تابش

تیراژ: ۲۵۰۰ نسخه

فهرست

مقدمه

۱. بسیاری از مؤلفان کتاب های ریاضی، برابری را «معادله» می‌نامند و، آن وقت، تعریف می‌کنند: معادله بردوگونه است، معادلهٔ اتحادی و معادلهٔ غیراتحادی. در کتاب‌های فارسی معمول است که معادلهٔ اتحادی را اتحاد، و معادلهٔ غیراتحادی رامعادله می‌نامند (که ماهم دراین کتاب، ازهمین نام‌گذاری اخیر، استفاده کرده‌ایم).

به‌همین ترتیب، تقریباً درهمهٔ کتاب‌های بیگانه، هررابطه‌ای راکه با یکی از علامت‌های $>$ یا $<$ مشخص شده باشد، «نابرابری» می‌خوانند و آن‌ها را به دو گروه «نابرابری اتحادی» و «نابرابری غیراتحادی» تقسیم می‌کنند.

دراین کتاب، همان طورکه در بیشترکتاب‌های فارسی معمول است، به جای «نابرابری اتحادی» اصطلاح «نابرابری» و به‌جای اصطلاح «نابرابری غیراتحادی»، اصطلاح «نامعادله» را به‌کاربرده‌ایم.

۲. درآغاز نظر براین بودکه، دراین‌کتاب، هم ازنابرابری‌ها صحبت شود وهم از نامعادله‌ها؛ ولی به‌دلیل حجم بزرگی‌که‌کتاب به خود می گرفت، نامعادله‌ها به‌جلد دیگری ازکتاب موکول شد.

۳. همان طورکه روال کار من درتهیهٔ این‌گونه‌کتاب‌هاست، دراین جا هم، خیلی از مفهوم‌ها یا قضیه‌ها را ضمن حل تمرین‌ها آورده‌ام و، بنابراین، برای استفادهٔ‌کامل ازکتاب، باید به‌حل تمرین‌ها هم توجه شود.

۴. اگرضمن مرورکتاب، به‌مسأله‌ها یا قضیه‌های دشواری برخوردید،

می‌توانید، در دور اول، از آن‌ها صرف‌نظر کنید و، بعد، در دور دوم، دوباره به آن‌ها بپردازید؛ ولی در هر حال، تلاش کنید، ابتدا خودتان تمرین‌ها را حل کنید، و بعد ــ چه به‌نتیجه رسیده‌اید یا نرسیده‌اید ــ به‌بخش حل مراجعه و کار خود را مورد ارزیابی قرار دهید. ادعا نمی‌شود که، راه حل‌های این کتاب برای تمرین‌ها، بهترین راه حل‌هاست و، چه‌بسا، شما بتوانید راه حل‌های زیباتری پیدا کنید.

۵. کتاب را از روی یادداشت‌های جداگانه‌ای که در طول سال‌ها تهیه شده بودند، آماده کرده‌ام و، به‌همین مناسبت، ضمن، آخرین بازدید مطالب، متوجه شدم، تعداد اندکی از مسأله‌ها، در جاهای مختلف تکرار شده‌اند. ولی از آن جاکه، این وضع، هیچ لطمه‌ای به‌کار وارد نمی‌کرد، از حذف آن‌ها خودداری کردم.

۶. کتاب وقتی می‌تواند کامل و جامع شود که مورد عنایت همکاران و دانش‌آموزانی قرار گیرم که با یادآوری‌ها خود، مرا برای چاپ‌های بعدی کتاب راهنمائی کنند.

مؤلف

نخستین آشنائی‌ها

۱. می‌دانیم عدد π برابراست با نسبت طول محیط دایره برطول قطر آن. ولی طول محیط دایره راچگونه باید محاسبه کرد؟ ارشمیدس، ریاضی‌دان یونانی باانتخاب ۹۶ ضلعی منتظم محاط دردایره به‌جای خود دایره، نتیجه گرفت که عدد π بین دوعدد $\frac{۲۲۳}{۷۱}$ و $\frac{۲۲}{۷}$ است، یعنی

$$\frac{۲۲۳}{۷۱} < \pi < \frac{۲۲}{۷} \Longrightarrow ۳/۱۴۰۸۳ < \pi < ۳/۱۴۲۸۵$$

و $۳\frac{۱}{۷} = \frac{۲۲}{۷}$ را تقریب خوبی برای عدد π می‌دانست. نابرابری‌های ارشمیدس برای عدد π درست است و از آن می‌توان نتیجه گرفت که عدد π تا دو رقم بعد از ممیز برابر است با ۳/۱۴.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضی‌دان بزرگ ایرانی همین روش را در پیش می‌گیرد و با آغاز از شش ضلعی‌های محاطی و محیطی، خود را به ۳×۲^{۲۸} ضلعی (یعنی ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ ضلعی) منتظم محاطی و محیطی می‌رساند، و، در نتیجه، عدد π را تا ۱۷ رقم درست بعداز ممیز به‌دست می‌آورد. کاشانی، برای محیط دایره، واسطهٔ حسابی محیط های ۳×۲^{۲۸} ضلعی منتظم محاطی و ۳×۲^{۲۸} ضلعی منتظم محیطی را درنظر می‌گیرد.

همچنین ابوالوفا بوزجانی، ریاضی‌دان دیگر ایرانی، برای محاسبهٔ

سینوس نیم درجه، با استفاده از نابرابری‌های

$$\frac{۲}{۳}\sin\left(\frac{۱۵}{۳۲}\right)^{\circ}+\frac{۱}{۳}\sin\left(\frac{۱۸}{۳۲}\right)^{\circ}<\sin ۳۰'<\frac{۴}{۳}\sin\left(\frac{۱۵}{۳۲}\right)^{\circ}-\frac{۱}{۳}\sin\left(\frac{۱۲}{۳۲}\right)^{\circ}$$

واسطهٔ حسابی مقدارهای دوطرف را به‌دست می‌آورد.

۲. اکنون به‌این مسأله از «حساب» توجه کنیم.

می‌خواهیم تعدادی دانش‌آموز را، برای بازدید ازشهری باستانی، با اتوبوس به‌سفر ببریم. اگر اتوبوس‌های باظرفیت ۸۰ نفر را انتخاب‌کنیم، در یکی‌از اتوبوس‌ها چند صندلی خالی باقی‌می‌ماند. اگر ازاتوبوس‌های ۶۰ نفری استفاده‌کنیم، باید ۸ اتوبوس بیشتردرنظربگیریم، درضمن، بازهم یکی ازاتوبوس‌ها باظرفیت کامل پرنمی‌شود. ولی اگر با اضافه کردن ۵ اتوبوس دیگر از اتوبوس‌های با ظرفیت ۵۰ نفر استفاده کنیم، همهٔ اتوبوس‌ها پر می‌شوند و صندلی خالی باقی نمی‌ماند، آیا می‌توانید تعداد دانش‌آموزان را پیدا کنید؟

حل مسأله دشوار نیست ولی، ضمن آن، ناچاریم از نابرابری و ویژگی‌های آن استفاده‌کنیم. تعداد اتوبوس‌های ۵۰ نفری را n می‌گیریم ($n\in\mathbf{N}$؛ یعنی n، عددی درست ومثبت است). بنابراین، تعداد دانش‌آموزان برابر است با $۵۰n$.

تعداد اتوبوس‌های ۶۰ نفری، ۵ واحد ازتعداداتوبوس‌های ۵۰ نفری کمتر وبرابر $(n-۵)$ است. چون دراین حالت، یکی‌ازاتوبوس‌هاکاملاً پر نشده است، بنابراین باید داشته باشیم:

$$۶۰(n-۵)>۵۰n \quad و \quad ۶۰(n-۶)<۵۰n$$

ازاین دونابرابری، به‌سادگی به دست می‌آید: $۳۰<n<۳۶$؛ یعنی n برابر با یکی‌از عددهای درست از ۳۱ تا ۳۵ است.

باتوجه به‌صورت مسأله، تعداد اتوبوس‌های ۸۰ نفری برابراست بسا $n-۱۳$؛ وچون یکی‌از اتوبوس‌ها پرنمی‌شود، باید داشته باشیم:

$$۸۰(n-۱۳)>۵۰n \quad ، \quad ۸۰(n-۱۴)<۵۰n$$

از این دونابرابری به دست می‌آید $\frac{۱۱۲}{۳} > n > \frac{۱۰۴}{۳}$ و یا

$$۳۴\frac{۲}{۳} < n < ۳۷\frac{۱}{۳}$$

وچون n، عددی درست است، بنابراین می‌تواند یکی از سه عدد ۳۵، ۳۶ یا ۳۷ باشد. ولی قبلاً دیدیم که n نمی‌تواند از ۳۵ بزرگتر باشد وتنها $n = ۳۵$ قابل قبول است. تعداد دانش آموزان برابر ۳۵×۵۰ یعنی ۱۷۵۰ نفر است.

۰۳ می‌دانیم وقتی در تابع های مثلثاتی، نامی از واحد کمان نبرند، به معنای آن است که با واحد «رادیان» سروکار داریم: $tg\,5$، یعنی تانژانت ۵ رادیان و $\sin\left(\cos\frac{\pi}{۳}\right)$، یعنی سینوس نیم رادیان (زیرا $\cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$، در ضمن واحد اندازه‌گیری در دایرهٔ مثلثاتی، شعاع دایره است، پس $\frac{۱}{۲}$ یعنی $\frac{۱}{۲}$ شعاع وطول $\frac{۱}{۲}$ شعاع، وقتی بر کمان دایره منتقل شود، برابر $\frac{۱}{۲}$ رادیان است). اکنون این مسأله را حل کنید.

کدام بزرگترند: $\cos\sin ۱$ یا $\sin\cos ۱$؟

یک رادیان برابر است با $\frac{۱۸۰}{\pi}$ درجه، یعنی کمان یک رادیان از کمان ۶۰ درجه کوچکتر است (یک رادیان، اندکی بیشتر از ۵۷ درجه است)، پس

$$\sin ۱ < \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

کسینوس، در ربع اول دیراهٔ مثلثاتی نزولی است، بنابراین

$$\cos\sin ۱ > \cos\frac{\sqrt{۳}}{۲} > \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲} \qquad (۱)$$

به‌همین ترتیب داریم:

$$\cos ۱ > \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$$

سینوس، در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی صعودی است، بنابراین

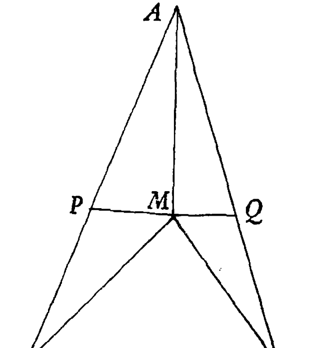
$$\sin\cos 1 < \sin\frac{1}{2} < \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

به‌این ترتیب باتوجه به (۱) و (۲) داریم:

$$\cos\sin 1 > \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \sin\cos 1 < \frac{1}{2}$$

یعنی $\sin\cos 1 < \cos\sin 1$. [در تمرین ۱۶۰۹)، حالت کلی این مساله را خواهید دید.]

۴. در آغاز هندسه دیده‌ایم که، اگر نقطه‌ای در درون مثلث انتخاب و از آن‌جا به‌سه رأس مثلث وصل کنیم، مجموع طول‌های سه پاره خط راست حاصل، از مجموع طول‌های سه ضلع مثلث کوچکتر است. ولی در واقع، می‌توان حکم قوی‌تری را ثابت کرد: مجموع طول‌های سه پاره خط راست حاصل، نه‌تنها ازمجموع طول‌های سه ضلع، بلکه ازمجموع طول‌های دوضلع بزرگتر مثلث، کوچکتر است.



شکل ۱

درمثلث ABC (شکل۱) می‌دانیم:

$$|BC| < |AC| < |AB|$$

M نقطه‌ای دردرون مثلث‌است.می‌خواهیم ثابت کنیم

$$|MA| + |MB| + |MC| < \\ < |AB| + |AC|$$

در شکل ۱، PQ را که از M گذشته‌است، موازی با BC (ضلع کوچکتر مثلث) رسم کرده‌ایم. مثلث APQ بامثلث ABC متشابه است و بنابراین

$$|PQ| < |AQ| < |AP| \qquad (1)$$

اگر درمثلثی، ازیك رأس به‌نقطه‌ای از ضلع رو به‌رو وصل کنیم، پاره ـ

خط راستی که به‌دست می‌آید، نمی‌تواند از هر دوضلعی که به این رأس رسیده‌اند بزرگتر باشد (چرا؟) و، دست کم، از ضلع بزرگتر، کوچکتر است، یعنی

$$|AM|<|AP| \qquad (۲)$$

درضمن، از نابرابری‌های (۱) داریم:

$$|PM|+|MQ|<AQ \qquad (۳)$$

درستی دو نابرابری زیر هم روشن‌اند:

$$|MC|<|MQ|+|QC| \qquad (۴)$$

$$|MB|<|BP|+|PM| \qquad (۵)$$

اکنون، از مجموع نابرابری‌های (۲) تا (۵)، بعداز ساده‌کردن، به‌دست می‌آید:

$$|MA|+|MB|+|MC|<|AB|+|AC|$$

۵. درسال ۱۳۷۱ به سرمی‌بریم (سال تألیف این کتاب کوچك). در دایره‌ای به‌شعاع یك متر، ۱۳۷۱ نقطه به‌صورتی دلخواه قرارداده‌ایم. ثابت کنید دست‌کم یك مثلث باراس‌های سه‌نقطه ازاین ۱۳۷۱ نقطه وجود دارد، به‌نحوی‌که مساحت آن‌کمتراز ۱۵ سانتی‌متر مربع باشد.

محیط دایره را به ۶۸۵ بخش برابر، تقسیم وازنقطه‌های تقسیم به‌مرکز دایره وصل می‌کنیم؛ ۶۸۵ قطاع برابر به‌دست می‌آید. مساحت دایره، برابر یك متر مربع یا ۱۰۰۰۰ سانتی‌متر مربع است، بنابراین، مساحت هریك از این قطاع‌ها، برابر است با

$$۱۰۰۰۰:۶۸۵=۱۴/۵۹ \ldots <۱۵ \text{ (سانتی‌مترمربع)}$$

دست‌کم یك قطاع پیدا می‌شودکه شامل سه نقطه (دردرون یا روی مرزهای آن) باشد، زیرا اگرهیچ قطاعی شامل بیش‌از دونقطه نباشد، آن‌وقت تعدادکل‌نقطه‌ها از ۶۸۵ × ۲، یعنی ۱۳۷۰ تجاوزنمی‌کند، درحالی‌که تعداد نقطه‌های ما برابر ۱۳۷۱ می‌باشد. اکنون اگر سه نقطه‌ای را که متعلق به یك قطاع هستند، راس‌های یك مثلث به‌حساب آوریم، روشن است‌که مساحت آن

از مساحت قطاع کوچکتر و، بنابراین از ۱۵ سانتی‌متر مربع کمتر می‌شود.

۶. ممکن است تصور شود که دست کم برای حل معادله‌ها، نیازی به‌استفادهٔ از نابرابری نداریم. اکنون به‌این مسأله توجه کنید.

چه مقدارهایی از x، در این معادله صدق می‌کنند:

$$\left[\frac{x-3}{2}\right]=\left[\frac{x-2}{3}\right] \qquad (1)$$

منظور از $[a]$، بخش درست عدد a است.

شرط لازم برای این‌که بخش‌های درست دو عدد با هم برابر باشند، این است که قدرمطلق تفاضل آن‌ها، از واحد کوچکتر باشد:

$$\left|\frac{x-3}{2}-\frac{x-2}{3}\right|<1 \qquad (2)$$

این نامعادله به سادگی حل می‌شود و به جواب $-1<x<11$ می‌رسد. یعنی جواب‌های معادلهٔ (۱) را باید در بین عددهایی جست و جو کرد که در بازهٔ $(-1, 11)$ قرار دارند.

ولی شرط (۲)، برای معادلهٔ (۱) کافی نیست. علاوه بر شرط (۲)، برای برقراری معادلهٔ (۱)، باید بخش درست عددهای $\frac{x-3}{2}$ و $\frac{x-2}{3}$ یکی باشد، یعنی در فاصلهٔ بین آن‌ها، عدد درستی واقع نباشد. قدرمطلق تفاضل دو عدد $2/1$ و $1/7$ یا دو عدد $-4/1$ و $-3/5$ از واحد کوچکتر است، در حالی‌که بخش درست آن‌ها، یکی نیست. دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) $\frac{x-3}{2}<\frac{x-2}{3}$. از این نامعادله به‌دست می‌آید $x<5$. با توجه به‌جواب نامعادلهٔ (۲)، باید روشن کنیم، در حالت $-1<x<5$ به‌ازای چه مقدارهایی از x، عدد درستی بین دو عدد $\frac{x-3}{2}$ و $\frac{x-2}{3}$ قرار می‌گیرد؛ $k\in \mathbf{Z}$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$\frac{x-3}{2}<k\leqslant\frac{x-2}{3}$$

که از آن، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$3k+2 \leqslant x < 2k+3 \qquad (3)$$

از نابرابری $3k+2 < 2k+3$ نتیجه می‌شود $k<1$ و با در نظر گرفتن $x\in(-1,5)$، به‌دست می‌آید: $k=0$ یا $k=-1$. به‌ازای این مقدارهای k، به‌ترتیب، از (3) نتیجه می‌شود:

$$2 \leqslant x < 3 \quad \text{و} \quad -1 < x < 1$$

یعنی بازه‌های $[2,3)$ و $(-1,1)$ را باید از جواب نامعادلهٔ (2) کنار گذاشت.

2) $\frac{x-3}{2} < \frac{x-2}{3}$، که از آن به دست می‌آید $x<5$. بنابراین باید روشن کنیم، درحالت $5<x<11$، به ازای چه مقدارهایی از x، عدد درستی بین دو عدد $\frac{x-2}{3}$ و $\frac{x-3}{2}$ قرار می‌گیرد! با استدلالی شبیه حالت قبل، معلوم می‌شود که بازه‌های $[7,8)$ و $[9,11)$ باید از جواب نامعادلهٔ (2) کنار گذاشته شوند.

به‌این‌ترتیب، مجموعهٔ جواب معادلهٔ (1) به‌دست می‌آید:

$$[1,2)\cup[3,7)\cup[8,9)$$

۷. پی‌بردن به‌ویژگی‌های چندضلعی‌ها، نه‌تنها در خود ریاضیات، بلکه درضمن، در بسیاری از کارهای عملی و صنعتی اهمیت دارد؛ و بسیاری از این ویژگی‌ها را با نابرابری می‌توان نشان داد. به‌این مسأله توجه کنید.

ثابت کنید، درهر چندضلعی، دست‌کم دوضلع به‌طول‌های a و b وجود دارد، به‌نحوی که

$$1 \leqslant \frac{a}{b} < 2$$

طول ضلع‌های n ضلعی‌را، نه به‌ردیف قرارگرفتن آن‌ها، بلکه به‌ردیف اندازهٔ طول‌های آن‌ها، برابر a_1، a_2، ...، a_n می‌گیریم:

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n$$

از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض را براین می‌گیریم که، برای $i = 1, 2, \dots, n-1$، داشته باشیم: $\frac{a_i}{a_{i+1}} \geqslant 2$. در این صورت خواهیم داشت:

$$a_2 \leqslant \frac{1}{2}a_1, \ a_3 \leqslant \frac{1}{4}a_1, \ \dots, \ a_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}a_1$$

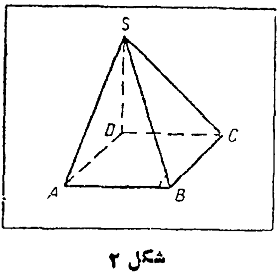
که ازمجموع آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n \leqslant a_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < a_1$$

که نمی‌تواند درست باشد (درهرچند ضلعی، طول یك ضلع، از مجموع طول‌های ضلع‌های دیگر، کوچکتر است).

۸. ازویژگی‌های نابرابری‌ها، برای حل مسأله‌های مربوط به‌ماکزیمم و می‌نیمم هم می‌توان استفاده کرد (چه درجبر وچه درهندسه). به‌این مسألهٔ هندسی توجه کنید:

درهرم $SABCD$، یال SD برصفحهٔ قاعدهٔ $ABCD$ عمود است؛ $ABCD$ یك مستطیل‌است وداریم: $|BC| = |SC| = 1$ و $\widehat{SBA} = \alpha$. به‌ازای چه مقداری از α، حجم هرم به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد؟



شکل ۲

بنابرفرض، $[SD]$ ارتفاع هرم است (شکل ۲) و همهٔ وجه‌ها، مثلث‌هایی قائم‌الزاویه‌اند (قائم‌الزاویه‌بودن‌وجه‌های SDA و SDC واضح است؛ از طرف دیگر، چون $[SD] \perp [DC]$ و $[DC] \perp [BC]$، پس بنابرقضیهٔ سه عمود $[SC] \perp [BC]$ وبه همین ترتیب $[SA] \perp [AB]$ ووجه‌های SBC و SAB قائم‌الزاویه‌اند). چون

$$|AB| = |DC| < |SC| = 1 \text{ و } |SB| = \sqrt{2}$$

بنابراین $\cos\alpha = |AB| : |SB| < ۱ : \sqrt{۲}$ و $\frac{\pi}{۴} < \alpha < \frac{\pi}{۲}$.

حجم هرم برابر است با $V = \frac{\sqrt{۲}}{۳}\cos\alpha\sqrt{۱-۲\cos^۲\alpha}$ (محاسبه کنید!).

به‌این‌ترتیب، برای این‌که حجم هرم به‌حداکثرمقدارخود برسد، باید $\cos\alpha\sqrt{۱-۲\cos^۲\alpha}$ ویا $\cos^۲\alpha(۱-۲\cos^۲\alpha)$ ماکزیمم شود. داریم:

$$\cos^۲\alpha(۱-۲\cos^۲\alpha) = -۲\left(\cos^۴\alpha - \frac{۱}{۲}\cos^۲\alpha\right) =$$

$$= -۲\left(\cos^۲\alpha - \frac{۱}{۴}\right)^۲ + \frac{۱}{۸} \leqslant \frac{۱}{۸}$$

حداکثر $\cos\alpha\sqrt{۱-۲\cos^۲\alpha}$ به‌ازای $\cos^۲\alpha = \frac{۱}{۴}$، یعنی $\alpha = \frac{\pi}{۳}$ به دست می‌آیدکه، دراین صورت، حجم هرم برابر $\frac{۱}{۶}$ واحد مکعب می‌شود.

مسأله را، بدون محاسبهٔ حجم‌هرم هم می‌توان حل کرد. حجم‌هرم برابر است با

$$V = \frac{۱}{۳}|BC|\cdot|DC|\cdot|SD| = \frac{۱}{۳}|DC|\cdot|SD|$$

حاصل ضرب $|DC|\cdot|SD|$ دوبرابرمساحت مثلث SDC است. برای وتر این مثلث، داریم: $|SC| = ۱$. بنابراین، مساحت آن وقتی به‌حداکثر مقدار خود می‌رسدکه مثلث متساوی‌الساقین باشد:

$$|SD| = |DC| = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ودراین حالت به‌دست می‌آید:

$$\cos\alpha = |AB| : |SB| = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{۳}$$

۹. از نابرابری‌ها، برای تعریف حد ومحاسبهٔ آن نیز می‌توان استفاده کرد. نمونه‌ای برای آن می‌آوریم:

ثابت‌کنید
$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\dots+\frac{۱}{۲^n}\right)=۱$$

مقدار درون پرانتز را A_n می‌نامیم:

$$A_n=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\dots+\frac{۱}{۲^n}$$

باید ثابت کنیم، مقدار A_n، با بزرگ شدن n، به واحد نزدیك می‌شود، به‌نحوی‌که می‌توان n راطوری پیداکردکه تفاضل $(۱-A_n)$ ازهرعددکوچك ودلخواه ازپیش تعیین شده‌ای،کمتر باشد. مثلاً ببینیم، n را چگونه انتخاب کنیم‌که، برای‌آن، داشته باشیم:

$$۱-A_n<\frac{۱}{۱۰^۶}$$

با توجه به محاسبهٔ مجموع حدها درتصاعد هندسی داریم:

$$A_n=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n+۱}}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱-\frac{۱}{۲^{n+۱}}\text{؛ } ۱-A_n=\frac{۱}{۲^{n+۱}}$$

بنابراین، باید داشته باشیم: $\frac{۱}{۲^{n+۱}}<\frac{۱}{۱۰^۶}\Longrightarrow ۲^{n+۱}>۱۰^۶$

و چـون $۲^{۲۰}=۱۰۲۴^۲>۱۰۰۰^۲=۱۰^۶$، بنابرایـن اگر $۲^{n+۱}$ از $۲^{۲۰}$ بزرگتر ویابرابر باآن باشد، به‌خودی خود از $۱۰^۶$ بزرگترمی‌شود:

$$۲^{n+۱}\geqslant ۲^{۲۰}\Longrightarrow n+۱\geqslant ۲۰\Longrightarrow n\geqslant ۱۹$$

وبه‌ازای $n=۱۹$ داریم:

$$۱-A_{۱۹}=\frac{۱}{۲^{۲۰}}=\frac{۱}{۱۰۴۸۴۹۶}<\frac{۱}{۱۰^۶}$$

□

باهمین نمونه‌ها، روشن می‌شودکه پهنهٔ کاربرد نابرابری‌ها تاچه حـد

گسترده‌است. حقیقت این است که، نابرابری‌ها، درهمهٔ شاخه‌های ریاضیات و ریاضیات کاربردی (نظریهٔ عددها، جبر، مثلثات، برنامه‌ریزی خطی، هندسه، نظریهٔ احتمال، معادله‌های دیفرانسیلی، نظریهٔ تابع‌ها،...) کاربردی گسترده دارد و، بنابراین، آشنایی با آن‌ها ونحوهٔ استفاده از آن‌ها، برای هرکسی که با ریاضیات کار می‌کند، ضروری است.

دراین کتاب کوچك، بااثبات مهم‌ترین نابرابری‌ها و ذکر روش حل برخی نامعادله‌ها، تکیهٔ اصلی برحل مسأله‌هاست، زیرا درحل مسأله، در هر- مورد خاص، باید راه حل خاص آن‌را جست وجوکرد و، جز درمورد برخی نابرابری‌های سنتی، نمی‌توان راه حلی کلی پیداکردکه برای اثبات هر- نابرابری دلخواه قابل استفاده باشد. همچون دیگر کتاب‌های کوچك ریاضی دراین کتاب هم، بسیاری ازنکته‌ها واشاره‌ها، ضمن حل مسأله‌ها آمده‌است‌و، به همین جهت، به‌خواننده پیشنهاد می‌شودکه ابتدا، خود تلاش کندتا مسأله‌ها را، بدون مراجعه به‌راه‌حل آنها درپایان کتاب، حل کند، ولی درهرحال، برای بازرسی راه حل خود، به‌راه حلی هم که دراین کتاب آمده است مراجعه وراه حل خود را با آن مقایسه‌کند. هیچ ادعائی نداریم، که راه حل های این کتاب بهترین وزیباترین آنها باشد وچه بسا، خواننده بتواند راه‌حل‌های زیباتری پیداکند.

ازذکرویژگیهای سادهٔ مربوط به نابرابری‌ها، که درهمهٔ کتاب‌های درسی موجودند، صرف‌نظرکرده‌ایم ودراین جا، تنها به مهم‌ترین آن‌ها اشاره می‌کنیم:

۱) دوطرف یك نابرابری را می‌توان درعددی مخالف صفر ضرب یا برعددی مخالف صفرتقسیم کرد، به‌شرطی‌که در حالت منفی‌بودن عدد، جهت نابرابری را تغییردهیم.

۲) اگرعددهای واقع دردوطرف علامت نابرابری، هردومثبت یاهر- دو منفی باشند، می‌توان دوطرف نابرابری را به‌توان‌عددی طبیعی‌رساند، به- شرطی‌که درحالت منفی بودن عددها وتوان‌های زوج، جهت علامت‌نابرابری را عوض‌کنیم.

درحالتی‌که عددهای دوطرف علامت نابرابری، یکی مثبت ودیگری

منفی باشد، نمی‌توان دوطرف را به‌توان عددی زوج رساند.

۳) ازدوطرف نابرابری می‌توان ریشهٔ فردگرفت، ولی برای گرفتن ریشهٔ زوج، باید عددهای دوطرف علامت نابرابری مثبت باشند.

۴) ازدوطرف نابرابری می‌توان لگاریتم گرفت، به‌شرطی‌که عددهای دوطرف علامت نابرابری مثبت ومبنای لگاریتم بزرگتراز واحد باشد. در حالتی‌که عددهای دوطرف علامت نابرابری مثبت ومبنای لگاریتم، عددی مثبت وکوچکتراز واحد باشد، بالگاریتم گرفتن ازدوطرف، جهت نابرابری عوض می‌شود.

تمرین

۱. کدام بزرگترند:

۱) 17^{14} یا 31^{11} ؛ ۲) $2\sqrt{500}$ یا $\sqrt{499}+\sqrt{501}$؛

۳) $\frac{10^{1369}+1}{10^{1370}+1}$ یا $\frac{10^{1370}+1}{10^{1371}+1}$؛

۴) $2\sqrt[3]{500}$ یا $\sqrt[3]{499}+\sqrt[3]{501}$؛

۵) $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{6}$ یا $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{7}$؛

۶) $\frac{2}{201}$ یا $\ln\frac{101}{100}$ [$\ln a$، یعنی $\log_e a$ که لگاریتم طبیعی عدد a نامیده می‌شود؛ $e=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\approx 2/718$؛ فصل اول را ببینید]؛

۷) $2\sqrt{1}+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{9}$ یا

$2\sqrt{2}+2\sqrt{4}+2\sqrt{6}+2\sqrt{8}+\sqrt{10}$؛

۸) $\sqrt[7]{17}$ یا $\log_{17}71$ ؛ ۹) $tg55^\circ$ یا $\frac{7}{5}$

۱۰) $\cos\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{8}$ ؛ ۱۱) $\sqrt[8]{8}$ یا $\sqrt[9]{9}$؛

۱۲) x یا $\sqrt{x-1}+\sqrt{x(\sqrt{x}-1)}$ (باشرط $x>1$)؛

۱۳) 99^n+100^n یا 101^n ؛ ۱۴) 100^{300} یا $300!$ ؛

۱۵) $\dfrac{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}}{1+a+a^2+\dots+a^n}$ یا

$$\frac{1+b+b^2+\dots+b^{n-1}}{1+b+b^2+\dots+b^n}\ (a>b>0)$$ ؛

۱۶) $\sin\cos x$ یا $\cos\sin x$ ؛ ۱۷) $\dfrac{1}{\log_\pi 2}+\dfrac{1}{\log_2 \pi}$ یا ۲؛

۱۸) $\dfrac{1}{\log_5 \pi}+\dfrac{1}{\log_2 \pi}$ یا ۲ ؛

۱۹) $\alpha-\sin\alpha$ یا $\beta-\sin\beta\ \left(0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ ؛

۲۰) $tg\alpha-\alpha$ یا $tg\beta-\beta\ \left(0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ ؛

۲۱) $\frac{1}{\alpha}tg\alpha$ یا $\frac{1}{\beta}tg\beta\ \left(0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ ؛

۲۲) $\alpha-\sin\alpha$ یا $tg\alpha-\alpha\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ ؟

۲. این عددها را به‌ردیف صعودی (از کوچکتر به بزرگتر) بنویسید:

۱) $\frac{5}{6}$ ، $\frac{55}{69}$ ، $\frac{5}{7}$ ، $\frac{511}{655}$ ، $\frac{627}{727}$ ؛

۲) $\sin 1$ ، $\sin 2$ ، $\sin 3$ ، $\sin 4$ ، $\sin 5$ ، $\sin 6$ ، $\sin 7$ ؛

۳) $\sqrt[3]{43}$ ، $\sqrt[3]{44}$ ، $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$.

۳. به‌کمك رقم‌های از ۰ تا ۹، پنج عدد دو رقمی درست کنید، به‌نحوی که حاصل ضرب آن‌ها، حداکثر مقدارممکن باشد (از هررقم، تنهـا یك بـار استفاده کنید).

۴. در بسط $(\sqrt{30}+\sqrt{4320})^{103}$، بزرگترین جمله را پیدا کنید.

۵. a، b و c طول ضلع‌های یك مثلث و p برابر نصف محیط آن است، ثابت کنید:

$$\sqrt{p}<\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\leqslant\sqrt{3p}$$

۶. a، b و c سه عدد مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqslant abc$$

۷. برای $t>1$ ثابت کنید: $\frac{t^3+1}{t-1}>2(2+\sqrt{3})$.

۸. حاصل ضرب چهار عدد مثبت a، b، c و d برابر واحد است. ثابت کنید:

$$\sum a^2+\sum ab\geqslant 10$$

۹. دنبالهٔ $\{a_n\}$ باشرط‌های $a_0=a_n=0$ و

$$a_{k-1}-2a_k+a_{k+1}\geqslant 0 \quad , \quad (k=1, 2, \ldots, n-1)$$

مفروض است. ثابت کنید، عددهای a_1، a_2، ...، a_{n-1} غیرمثبت‌اند.

۱۰. به‌شرط غیرمنفی‌بودن a و b و c، ثابت کنید:

$$a^3+b^3+c^3\geqslant a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$$

۱۱. بافرض $a^3+b^3=2$، ثابت کنید: $a+b\leqslant 2$.

۱۲. می‌دانیم $a>c$ و $b>d$. ثابت کنید:

$$(a+b+c+d)^2>8(ad+bc)$$

۱۳. دراردوی دانش‌آموزان، که روی هم ۱۸ نفر بودند، دوگروه تشکیل شد. درطول سه شبانه روزی‌که اردو برپا بود، همیشه یك نفر نگهبانی می‌داد. گروه اول، دوشبانه روز اول را نگهبانی دادندکه این زمان را به‌طور برابر بین خود تقسیم‌کرده بودند. درگروه دوم، سه دختر بودکه هرکدام تنها یك ساعت نگهبانی دادند و بقیهٔ ساعت‌های نگهبانی، به‌طور برابر، بین بقیه تقسیم شد. اگرمجموع ساعت‌های نگهبانی هرپسرازگروه دوم وهرعضو از گروه اول، از ۹ ساعت کمتر باشد، درهرگروه چند نفر بوده‌اند؟

۱۴. در دو جعبه بیش‌از ۲۹ قطعهٔ یکسان وجود دارد. اگـر ۲ عدد از قطعه‌های جعبهٔ اول را برداریم. آن‌چه می‌ماند، ازسه برابر قطعه‌های جعبهٔ دوم بیشتر است. اگر به دو برابر قطعه‌های جعبهٔ دوم ۶۰ قطعه اضافه کنیم، تعـداد آن‌ها از سه‌برابر تعداد قطعه‌های جعبهٔ اول بیشتر می‌شود. درهر جعبه چند قطعه وجود دارد؟

۱۵. قدرت تولید کارخانهٔ اتومبیل سازی اول، از ۹۵۰ اتومبیـل در شبانه‌روز تجاوز نمی‌کند. قدرت کارخانهٔ دوم، ابتدا، برابر ۹۵ درصد قدرت تولید کارخانهٔ اول بود، ولی بعداز به‌راه افتادن خط تازهٔ تولیـد درکارخانهٔ دوم، قدرت تولید آن به‌اندازهٔ ۲۳ درصد قدرت تولیدکارخانهٔ اول بیشتر شد و به‌بیش‌از ۱۰۰۰ اتومبیل درشبانه روز رسید. قبل‌از بازسازی‌کارخانهٔ دوم، هریک ازکارخانه‌ها، چند اتومبیل درشبانه روز تولید می‌کرده‌اند؟ فرض بر-این‌است‌که تعداد اتومبیل‌های تولیدی هرکارخانه درشبانه‌روز، عددی‌درست است.

۱۶. سه‌آلیاژ داریم. آلیاژ اول شامل ۳۰٪ نیکل و ۷۰٪ مس، آلیاژ دوم شامل ۱۰٪ مس و ۹۰٪ منگنزو آلیاژ سوم شامل ۱۵٪ نیکل، ۲۵٪ مس و ۶۰٪ منگنز است. می‌خواهیم ازاین سه‌آلیاژ، آلیاژ تـازه‌ای درست‌کنیم که شامل ۴۰٪ منگنز باشد. حداقل و حداکثر درصد مس، درآلیاژ تـازه، چقدر می‌تواند باشد؟

۱۷. می‌نیمم تابع $f(x)=x^3-2x|x-2|$ را در بازهٔ $[0,3]$ و، همچنین، حداکثر مقدار تابع رادرهمین بازه پیدا کنید.

۱۸. O را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC و R راشعاع دایرهٔ محیطی مثلث مـی‌گیریم. اگـر R_1، R_2 و R_3، بـه ترتیب، شعاع دایره‌های محیطی مثلث‌های BOC، COA و AOB باشند، ثابت‌کنید:

$$R_1^2+R_2^2+R_3^2\geqslant 3R^2$$

۱۹. بخش درست هریک ازاین عددها را پیدا کنید:

$$1)\quad A=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$۲)\quad B=۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۴}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}};$$

$$۳)\quad C=۵۰\left(\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰}}+\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۱}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}}\right)$$

۲۰. کوچکترین عدد طبیعی n را پیدا کنید که، برای آن، داشته باشیم:

$$\frac{۳}{۱۰}<\{\sqrt{n}\}<\frac{۱}{۳}$$

[$\{x\}=x-[x]$، بخش کسری عدد x است].

۲۱. درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

$$۱)\quad \frac{۱}{۲}<\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\dots+\frac{۱}{۲n}<\frac{۳}{۴};$$

$$۲)\quad ۱<\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\dots+\frac{۱}{۳n+۱}<۲;$$

$$۳)\quad ۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۶}+\dots+\frac{۱}{n^۲}<۱\frac{۳}{۴};$$

$$۴)\quad \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۵}{۶}\dots\frac{۹۹}{۱۰۰}<\frac{۱}{۱۰};$$

$$۵)\quad \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۵}{۶}\dots\frac{۲n-۱}{۲n}<\frac{۱}{\sqrt{۳n+۱}};$$

$$۶)\quad ۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{m}<\frac{۱}{\sqrt{m}}+\frac{۱}{\sqrt{m+۱}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲\sqrt{n}-۲\sqrt{m-۱}$$

m و n عددهایی طبیعی‌اند و، درضمن $m<n$.

۲۲. (مسألهٔ بنوموسی درکتاب «مساحت شکل‌هـای مسطح وکروی»). دردایرهٔ به‌مرکز O وقطر $|AB|=2R$، C را نقطهٔ برخورد دایره با شعاعی می‌گیریم که برقطر AB عمود شده است. کمان BC را به سه‌بخش برابر تقسیم می‌کنیم و نقطه‌های تقسیم را F و H می‌نامیم. وتر کمان HC (یك سوم کمان BC) را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد امتداد آن را با امتداد قطـر AB، D می‌نامیم. از نقطه‌های F و H، وترهای FE و HG را موازی قطر AB و از نقطهٔ O (مرکز دایره) عمود OM را بر وتر HC رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

۱) $|OD|=|EF|+|GH|+R$؛

۲) $|OM|^2<\frac{1}{2}|HC|\cdot|OD|<R^2$.

۲۳. دریك چهاروجهی، طول یکی وتنها یکی‌ازیال‌ها ازواحدبزرگتر است. ثابت‌کنید، حجم چهاروجهی، از $\frac{1}{8}$ تجاوز نمی‌کند.

۲۴. دنبالهٔ غیرصعودی عددهای مثبت a_1، a_2، ...، a_n مفروض است. می‌دانیم

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$$

وبزرگترین جملهٔ دنباله، برابر $\frac{1}{2k}$ است ($k\in\mathbf{N}$). ثابت کنید، می‌تـوان k عدد متوالی‌از دنباله را طـوری انتخاب‌کردکه،کوچکترین آن‌ها، از نصف بزرگترین‌آن‌ها، بزرگتر باشد.

۲۵. بخش درست این عدد را پیداکنید:

$$A=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}$$

۲۶. درمجموع $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$، همهٔ کسرهایی را کـه در مخرج خود، رقم ۹ دارند، حذف‌کرده‌ایم. ثابت‌کنید مجموع کسرهای باقی‌مانده، به‌ازای هرمقدار $n\in\mathbf{N}$ از ۸۰ کوچکتراست.

۲۷. می‌دانیم

$$a_1-4a_2+3a_3\geqslant 0$$
$$a_2-4a_3+3a_4\geqslant 0$$
$$a_3-4a_4+3a_5\geqslant 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{98}-4a_{99}+3a_{100}\geqslant 0$$
$$a_{99}-4a_{100}+3a_1\geqslant 0$$
$$a_{100}-4a_1+3a_2\geqslant 0$$

به‌شرط $a_1=10$،مقدارهای a_2، a_3، ....، a_{100} راپیدا کنید.

۲۸. ۱) در مثلث ABC، می‌دانیم $\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}=m$ $(m>0)$

زاویه‌های B و C را، بر حسب زاویهٔ A پیدا کنید.

۲) ثابت کنید، درهر مثلث ABC، داریم:

الف) $\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}\leqslant\frac{1}{8}$ ؛

ب)

$$\sin^2\frac{\hat{A}}{2}+\sin^2\frac{\hat{B}}{2}+\sin^2\frac{\hat{C}}{2}\geqslant\frac{3}{4} \quad \text{و} \quad \cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\leqslant\frac{9}{4}$$

۲۹. می‌دانیم $0<x<\frac{\pi}{2}$. ثابت کنید:

$$\sin x>tg x-\frac{1}{2}tg^3 x$$

۳۰. α، β و γ زاویه‌هایی حاده و مثبت به مجموع $\frac{\pi}{2}$ هستند. ثابت کنید:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+tg\alpha+tg\beta+tg\gamma>\pi$$

فصل اول

عدد نپر

قضیهٔ ۱. ثابت کنید، به‌ازای $n\in \mathbf{N}$ و $n \geqslant ۲$ همیشه داریم:

$$۲<\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n<۳ \qquad (۱)$$

اثبات. از آن‌جاکه n عددی طبیعی است، با استفاده از قانون بسط دو جمله‌ای داریم:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n=۱+n\cdot\frac{۱}{n}+\frac{n(n-۱)}{۲}\cdot\frac{۱}{n^۲}+\ldots=$$

$$=۲+\frac{n(n-۱)}{۲}\cdot\frac{۱}{n^۲}+\ldots>۲$$

(همهٔ جمله‌های بعد از ۲، عددهایی مثبت‌اند). نابرابری سمت چپ ثابت شد. برای اثبات نابرابری سمت راست، همان بسط دوجمله‌ای را دوباره درنظر می‌گیریم:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n=۲+\frac{۱}{۲!}\cdot\frac{n(n-۱)}{n^۲}+\frac{۱}{۳!}\cdot\frac{n(n-۱)(n-۲)}{n^۳}+\ldots$$

چون کسرهای $\frac{n(n-1)}{n^2}$، $\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}$، ... از واحد کوچکترند، بنابراین:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots<3$$

به‌این ترتیب، برای $n>2$، می‌توان نوشت:

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3\leqslant n \qquad (2)$$

مسالهٔ ۱. درتمرین ۱۱۰۱) ثابت کردیم $\sqrt[9]{9}<\sqrt[8]{8}$. اکنون ثابت کنید، برای $n\in\mathbb{N}$ و $n\geqslant 3$، همیشه داریم: $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$

حل. به‌ازای $n=3$ باید ثابت کنیم: $\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$ یا $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$ (که‌درضمن، نشان می‌دهد، نابرابری موردنظر، برای $n=2$ برقرار نیست). اگر دوطرف این نابرابری رابه توان ۶ برسانیم، به‌نابرابری روشن $9>8$ می‌رسیم.

اکنون $n>3$ می‌گیریم. نابرابری مطلوب را می‌توان این‌طورنوشت:

$$(n+1)^n<n^{n+1}$$

اگر دوطرف آن رابر n^n تقسیم کنیم، به نابرابری $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n$ می‌رسیم که، بنابر (۲) درست است.

یادداشت. $\sqrt[3]{3}$ از واحد بزرگتر است و، درضمن، دنبالهٔ عددهای

$$\sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5},\ \dots,\ \sqrt[n]{n},\ \dots$$

دنباله‌ای نزولی است واگر توجه کنیم که: $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$، آن وقت

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^{\frac{n-1}{n}}}=1$$

مسألهٔ ۲. ثابت‌کنید، برای $n\in\mathbf{N}$ و $n>1$، معادلهٔ $x^n=x+n$، یك ریشه و تنها یك ریشه دربازهٔ $[1,2]$ دارد وتحقیق‌کنید، دنبالهٔ این‌ریشه‌ها، وقتی n دنبالهٔ عددهای طبیعی را بپیماید، دنباله‌ای نزولی است و به‌سمت واحد میل می‌کند.

حل. فرض می‌کنیم $f_n(x)=x^n-x-n$ $(n=2, 3, 4, \ldots)$. داریم:

$$x^n-x=x(x-1)(x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+1)$$

یعنی، هر تابع $f_n(x)$، به‌ازای $x>1$ صعودی است [می‌توانستیم با استفاده‌ازمشتق‌تابع $f_n(x)$، یعنی $f'_n(x)=nx^{n-1}-1$، قانع‌شویم که برای $x>1$: $f'_n(x)>0$ و درنتیجه $f_n(x)$ صعودی است]. درضمن داریم:

$$f_n(2)=2(2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots+1)-n\geqslant 0;$$

$$f_n(1)=-n<0$$

[به یاری استقرای ریاضی هم، می‌توان به سادگی ثابت کرد $2^n\geqslant n+2$ برای $n>1$]. به این ترتیب، معادلهٔ $f_n(x)=0$ دربازهٔ $[1,2]$ تنها یك ریشه دارد، این ریشه را x_n می‌نامیم.

برای بخش دوم مساله، ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{n+1}<x_n<\sqrt[n-1]{n} \qquad (n>2) \tag{3}$$

روشن است که $\sqrt[n]{n}>1$ ،$\sqrt[n]{n-1}>1$، یعنی $1-\sqrt[n]{n+1}<0$. ازطرف دیگر

$$f_n(\sqrt[n]{n+1})=(n+1)-\sqrt[n]{n+1}-n=1-\sqrt[n]{n+1}<0$$

نابرابری سمت چپ (۳) ثابت شد (زیرا تابع $f_n(x)$ در بازهٔ $[1, 2]$ صعودی است و، بنابراین، وقتی $f_n(\sqrt[n]{n+1})<f_n(x_n)$، آن وقت

$\sqrt[n]{n+1}<x_n$).

برای اثبات نابرابری سمت راست (۳)، ابتدا نابرابری (۲) را در نظر می‌گیریم:

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<n-1 \quad (n\geqslant 3)$$

این نابرابری را، به‌ترتیب، می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{n}{n-1}<\sqrt[n-1]{n-1}\Leftrightarrow(n-1)\sqrt[n-1]{n-1}-n>0$$

و به‌طور طبیعی $(n-1)\sqrt[n-1]{n}-n>0$. ازطرف دیگر داریم:

$$f(\sqrt[n-1]{n})=\sqrt[n-1]{n^n}-\sqrt[n-1]{n}-n=(n-1)\sqrt[n-1]{n}-n>0$$

بنابراین $x_n<\sqrt[n-1]{n}$. نابرابری سمت راست (۳) هم ثابت شد. به این ترتیب، باتوجه به (۳) می‌توان نوشت:

$$\ldots<\sqrt[n+1]{n+2}<x_{n+1}<\sqrt[n]{n+1}<x_n<\sqrt[n-1]{n}<\ldots$$

یعنی، دنباله ریشه‌های x_n، دنباله‌ای نزولی است و چون (یادداشت مسألهٔ ۱ را ببینید)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n-1]{n}=1$$

پس $\lim_{n\to\infty}x_n=1$. درضمن، چون $x_2=2$، بنابراین نتیجه می‌گیریم که x_n از $x=2$ (به‌ازای $n=2$) آغاز می‌کند و به‌تدریج، با بزرگ شدن n، به‌سمت واحد میل می‌کند.

□

قضیهٔ ۲. ثابت کنید، دنبالهٔ عددهای $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$، دنباله‌ای صعودی

است، یعنی

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \qquad (4)$$

اثبات. بسط هریك ازدوجمله‌ای‌ها را، به‌این صورت درمی‌آوریم:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=2+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^{2}}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^{3}}+\dots+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\dots 2}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^{n}}=$$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

به‌همین ترتیب

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\dots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots$$

$$\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

اگر جمله‌های نتیجهٔ این دو بسط را باهم مقایسه‌کنیم، روشن می‌شود که

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

به‌این ترتیب

$$(1+1)^1<\left(1+\frac{1}{2}\right)^2<\left(1+\frac{1}{3}\right)^3<\dots<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\dots<3$$

روشن است که، این قضیه را، می‌توان به‌صورت کلی‌تری بیان کرد:

اگر m و n دو عدد طبیعی و $m>n$، آن وقت

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

یادداشت. با روشی مشابه، می‌توان ثابت کرد که، دنبالهٔ عددهای $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ هم، وقتی n عددهای طبیعی $n>1$ را می‌پیماید، دنباله‌ای صعودی است، یعنی

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \qquad (5)$$

قضیهٔ ۳. ثابت کنید، دنبالهٔ عددهای $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$، دنباله‌ای نزولی است، یعنی با بزرگ شدن n، کوچک می‌شود:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (6)$$

اثبات. به ترتیب داریم:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=\frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}$$

عددهای $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$، دنباله‌ای صعودی را تشکیل می‌دهند (یادداشت قضیهٔ ۲ را ببینید)، بنابراین، عکس این عددها، دنباله‌ای نزولی را خواهند ساخت.

اثبات این قضیه را، به‌طریق دیگری هم می‌توان داد. نسبت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{(n+1)^{n+1}\cdot(n-1)^{n}}{n^{2n+1}} =$$

$$= \frac{(n+1)^{n}(n-1)^{n}(n+1)}{n^{2n+1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n}\cdot\frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

برای عامل اول این نتیجه داریم:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} = 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n^3}-\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{n^3}+$$

$$+\dots \leqslant 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^3}+\dots$$

درضمن روشن است که

$$\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^4} < 1$$

به‌این‌ترتیب $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$، یعنی $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} < 1$

و

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}$$

این قضیه را هم، می‌توان به‌صورت کلی‌تری بیان کرد:

به شرط طبیعی بودن عددهای m و n و $m > n \geqslant 2$، همیشه داریم:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

□

درقضیهٔ (۱) ثابت کردیم:

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 3 \quad , \quad n > 1$$

درضمن، روشن شدکه دنبالهٔ عددهای

$$\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)^{۲},\ \left(۱+\frac{۱}{۳}\right)^{۳},\ \left(۱+\frac{۱}{۴}\right)^{۴},\ \ldots,\ \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n},\ \ldots \qquad (۷)$$

دنباله‌ای صعودی است. بنابراین $\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}$ دارای حدی است‌که بین ۲ و ۳ قراردارد. این‌حد را،که به عدد نپر معروف‌است باحرف e نشان می‌دهند:

$$e=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}$$

درضمن $۳>e>\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}$.

همچنین، باتوجه به‌نابرابری (۶)، دنبالهٔ عددهای

$$\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)^{۳},\ \left(۱+\frac{۱}{۲}\right)^{۴},\ \left(۱+\frac{۱}{۴}\right)^{۵},\ \ldots,\ \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱},\ \ldots \qquad (۸)$$

دنباله‌ای نزولی است و، در ضمن، هرجملهٔ دنبالهٔ (۸)، بابزرگ شدن n، به‌سمت جملهٔ نظیرخود در دنبالهٔ (۷) میل می‌کند. یعنی دنبالهٔ (۸) هم به سمت همان عدد e میل می‌کند. درواقع

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱}=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)=e.۱=e$$

در ضمن $e<\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱}$. مثلاً از آن‌جاکه

$$\left(۱+\frac{۱}{۵}\right)^{۵}=۲/۴۸۸۳۲ \quad \text{و} \quad \left(۱+\frac{۱}{۵}\right)^{۶}=۲/۹۸۵۹۸۴$$

بنابراین $۲/۴۸۸۳۲<e<۲/۹۸۵۹۸۴$.

e، عددی است گنگ وغیرجبری، یعنی نمی‌تواند ریشهٔ معادله‌ای با ضریب‌های گویا باشد. این‌عدد، که به‌تقریب برابراست با $e\approx ۲/۷۱۸۲۸۱۸$، نقشی بسیار اساسی در ریاضیات دارد. مثلاً مبنای لگاریتم طبیعی عددها، همین عدد e است‌که با نماد $\ln$ نشان داده می‌شود: $\ln x=\log_e x$.

$f(x)=e^x$، تنها تابعی‌است که مشتقی برابر خود دارد: $f'(x)=e^x$.
عدد e را، می‌توان ازمجموع

$$e=۲+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۴!}+\cdots \qquad (۹)$$

به‌دست آورد، درضمن

$$\ln ۲=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}+\cdots \qquad (۱۰)$$

جواب مثبت هریک‌ازدومعادلهٔ درجه دوم زیر، مقدارتقریبی عدد e رامی‌دهد:

$$۲۷x^۲-۵۵x-۵۰=۰، \quad (x\approx ۲/۷۱۸۲۹)$$

$$۳۵x^۲-۸۳x-۳۳=۰، \quad (x\approx ۲/۷۱۸۲۸۵۲)$$

جون رنچ و دانیل شکس، درسال ۱۹۶۱ وبه‌کمك کامپیوتر، توانستند مقدار عدد e را تا ۱۰۰ هزار رقم به‌دست آورند.

تمرین

۳۱. ثابت کنید: الف) $\left(\frac{n}{۳}\right)^n<n!<\left(\frac{n}{۲}\right)^n$ به‌شرط $n\geqslant ۶$؛

ب) $\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<n\left(\frac{n}{e}\right)^n$ به‌شرط $n>۶$.

۳۲. کدام بزرگترند:

۱) $(۱/۰۰۰۰۰۱)^{۱۰۰۰۰۰۰}$ یا ۲؛ ۲) $۱۰۰۰^{۱۰۰۰}$ یا $۱۰۰۱^{۹۹۹}$؛

۳) $۹۹۷^{۹۹۹}$ یا $۹۹۹^{۹۹۷}$؟

۳۳. ثابت کنید $\left(۲-\frac{۱}{n}\right)^n\geqslant n$.

۳۴. ثابت کنید اگر داشته باشیم:

$$f(x)=\sqrt[n]{(x+۱)(x-۲)\cdots(x+n)}$$

(بین دو جملهٔ هرپرانتز زیررادیکال که درردیف فرد قرار دارد، علامت منفی

را در نظر بگیرید)، که در آن، n عددی است فرد، آن‌وقت $|f'(0)| > \frac{12}{55}$.

۳۵. آیا می‌توان از برابری تقریبی $\sin\alpha^{\circ} \approx \frac{n\alpha}{180}$، برای تشکیل جدول سه‌رقمی مقدار سینوس زاویه‌ها، تا ۱۰ درجه استفاده کرد؟

۳۶. کدام بزرگترند:

الف) e^{π} یا π^{e}؛ ب) a^{b} یا b^{a} ($a>1$ و $b>1$)؟

۳۷. n عددی است طبیعی؛ ثابت کنید:

$$\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}+\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}} \leqslant 2\sqrt[n]{n}$$

۳۸. برای هر عدد حقیقی x_1، دنبالهٔ عددهای

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

با شرط $x_{n+1}=x_n\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$ ($n>1$)، تشکیل داده‌ایم. ثابت کنید، تنها یك مقدار، x_1 وجود دارد که، به‌ازای آن، برای هر n داشته باشیم:

$$0<x_n<x_{n+1}<1$$

۳۹. a و b عددهایی مثبت‌اند، ثابت کنید:

$$(a+b)^2(a^2+b^2)^2(a^3+b^3)^2 \ldots (a^n+b^n)^2 \geqslant (a^{n+1}+b^{n+1})^n$$

۴۰. کدام بزرگترند:

الف) $A=\frac{2/00000000004}{(1/00000000004)^2+2/00000000004}$ یا

$B=\frac{2/00000000002}{(1/00000000002)^2+2/00000000002}$؛

ب) $B_1=\frac{1+b+b^2+\ldots+b^{n-1}}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$ یا

$A_1=\frac{1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}}{1+a+a^2+\ldots+a^n}$، باشرط $a>b>0$؟

۴۱. برای $n\in\mathbf{N}$ و $n\geqslant ۲$، ثابت کنید $\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k^۲}>\frac{۳n}{۲n+۱}$.

۴۲. باشرط $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$، ثابت کنید (نابرابری هیوگنس):

$$۲\sin\alpha+tg\alpha>۳\alpha$$

۴۳. طول ضلع‌های یك چهارضلعی را a، b، c و d می‌نامیم. ثابت کنید، در هر حال داریم:

$$a^۲+b^۲+c^۲>\frac{۱}{۳}d^۲$$

۴۴. ثابت کنید، به‌شرط $\hat{C}\geqslant ۹۰^\circ$، درمثلث ABC داریم:

$$|CD|+|AB|>|AC|+|BC|$$

D، پای ارتفاع وارد از راس C برقاعدهٔ AB است.

۴۵. برای عددهای مثبت α، β، a و b، می‌دانیم:

$$\alpha<\beta،\ \alpha+\beta<\pi،\ a+b<\pi،\ \frac{\sin a}{\sin b}\leqslant\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

ثابت کنید: $a<b$.

۴۶. یال‌های دو به‌دو متنافر یك چهاروجهی، به‌ترتیب دارای طول‌های a،$a_۱$ و b، $b_۱$ و c، $c_۱$ هستند. درضمن می‌دانیم ازمجموع‌های $a^۲+a_۱^۲$، $b^۲+b_۱^۲$ و $c^۲+c_۱^۲$، مجموع $c^۲+c_۱^۲$ ازدومجموع دیگر بزرگتراست. ثابت کنید:

$$a^۲+a_۱^۲+b^۲+b_۱^۲>c^۲+c_۱^۲$$

۴۷. این دستگاه دومعادلهٔ دو مجهولی راحل کنید.

$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}=xy،\ x^\alpha+y^\alpha=۸(xy)^{\frac{\alpha-۳}{۲}}،\ (\alpha\in\mathbf{R})$$

۴۸. a و b و c، عددهایی مثبت وحقیقی‌اند، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{a^۳+b^۳+abc}+\frac{۱}{b^۳+c^۳+abc}+\frac{۱}{c^۳+a^۳+abc}\leqslant\frac{۱}{abc}$$

۴۹. ثابت کنید، درهرچهارضلعی محدب، مجموع طول‌های دوقطر از

محیط چهارضلعی کوچکتر و از نصف محیط آن بزرگتر است.

۵۰. به‌شرط $a+b>2$، ثابت کنید $a^4+b^4>2$.

۵۱. a و b و c طول‌های سه ضلع یک مثلث‌اند. ثابت کنید، برای $n\in\mathbf{N}$ و $n\geqslant 2$، عددهای $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ و $\sqrt[n]{c}$ هم می‌توانند طول‌های سه ضلع یک مثلث باشند.

۵۲. O نقطهٔ دلخواهی در درون مثلث ABC و p نصف محیط مثلث است. ثابت کنید:

$$|OA|\cdot\cos\frac{\widehat{BAC}}{2}+|OB|\cdot\cos\frac{\widehat{CBA}}{2}+|OC|\cdot\cos\frac{\widehat{ACB}}{2}\geqslant p$$

علامت برابری، درچه حالتی پیش می‌آید؟

۵۳. به‌شرط $n\in\mathbf{N}$ ثابت کنید: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n+1}}{n(n+1)}<\frac{1}{2}$.

۵۴. نقطه‌های C_1، A_1، B_1 را، به ترتیب، روی ضلع‌های AB، BC، CA ازمثلث ABC انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی‌که داشته باشیم:

$$|AC_1|:|C_1B|=|BA_1|:|A_1C|=|CB_1|:|B_1A|=1:3$$

اگر P محیط مثلث ABC و p محیط مثلث $A_1B_1C_1$ باشد، ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}P<p<\frac{3}{4}P$$

۵۵. x و y عددهایی مثبت‌اند ودرمعادلهٔ $x^3+y^3=x-y$ صدق می‌کنند. ثابت کنید: $x^2+y^2<1$.

۵۶. دربارهٔ عددهای a و b می‌دانیم که نامعادلهٔ

$$a\cos x+b\cos 3x>1$$

جواب ندارد، ثابت کنید: $|b|\leqslant 1$.

۵۷. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} tg x_1 + 3 cotg x_1 = 2 tg x_2 \\ tg x_2 + 3 cotg x_2 = 2 tg x_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ tg x_{n-1} + 3 cotg x_{n-1} = 2 tg x_n \\ tg x_n + 3 cotg x_n = 2 tg x_1 \end{cases}$$

۵۸. ثابت کنید: $\int_0^1 \frac{x}{\cos x} dx < \ln 2$.

۵۹. دایره‌ای به‌شعاع R مفروض‌است. محیط n ضلعی منتظم محاط در این دایره را p_n و محیط n ضلعی منتظم محیط بـر آن را P_n می‌نامیم. ثابت کنید: $\frac{1}{2}(p_n + P_n) > 2\pi R$؛ یعنی واسطهٔ عددی محیطهای n ضلعی‌هـای منتظم محاطی و محیطی، ازمحیط دایره بزرگتراست.

۶۰. تحقیق‌کنید $e^6 > \pi^4 + \pi^5$. بزرگترین عدد طبیعی n را پیداکنید که درنابرابری $e^6 - \pi^4 - \pi^5 < 10^{-n}$ صـدق کند. (منظور تحقیق به‌کمك ماشین حساب است، ولی ماشین حسابی رادرنظر بگیریدکه تنها ۸ رقم عدد رامی‌تواند نشان دهد. دراین‌ماشین‌حساب، عدد π به‌صورت ۳/۱۴۱۵۹۲۶ وعدد e به‌صورت ۲/۷۱۸۲۸۱۸، یعنی‌تا ۷ رقم بعدازممیزو باتقریب نقصانی نشان داده می‌شود.)

فصل دوم

نابرابری‌های مربوط به‌واسطه‌ها

§ ۱. واسطهٔ حسابی، واسطهٔ هندسی، واسطهٔ توافقی و واسطهٔ مربعی دو عدد

قضیهٔ ۱. برای دو عدد مثبت a و b، واسطهٔ حسابی از واسطهٔ هندسی کوچکتر نیست یعنی

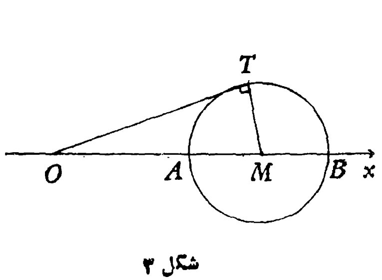
$$\frac{a+b}{۲} \geqslant \sqrt{ab} \qquad (۱)$$

درضمن، حالت برابری، تنها برای $a=b$ پیش می‌آید.

اثبات این قضیه بسیار ساده است. نابرابری به سادگی بـه نابرابری روشن

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲ \geqslant ۰$$

منجر می‌شود که در حالت $a=b$، با یك برابری سروکار خواهیم داشت.



شکل ۳

این نابرابری را به سادگی می‌توان تعبیر هندسی کرد. روی نیم‌خط Ox (شکل ۳) فرض می‌کنیم: $|OA|=a$ و $|OB|=b$. روشن است که اگر M را وسط دو نقطهٔ A و B بگیریم، داریم:

$$|OM|=\frac{|OA|+|OB|}{۲}=\frac{a+b}{۲}$$

دایرهٔ به‌قطر AB رادرنظرمی‌گیریم OT را بر آن مماس می‌کنیم (T، نقطهٔ تماس‌است) داریم:

$$|OT|^۲=|OA|\cdot|OB|=ab \Longrightarrow |OT|=\sqrt{ab}$$

به‌این‌ترتیب، طول پاره خط راست OM برابر واسطهٔ حسابی دو عدد a و b و طول پاره خط راست OT برابر واسطهٔ هندسی این دوعدد است و روشن است که $|OT|\leqslant|OM|$) در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMT، OM وتر و OT (یکی‌از ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ است). حالت برابری، مربوط به زمانی است که A و B برهم، منطبق باشندکه، دراین صورت نقطه‌های M و T هم بر آن‌ها منطبق می‌شوند.

نتیجه ۱. برای هرعدد حقیقی $x>۰$، مجموع $x+\frac{۱}{x}$ همیشه از ۲ بزرگتر و یابا ۲ برابر است.

درواقع، بنابرنابرابری (۱) داریم:

$$x+\frac{۱}{x}\geqslant ۲\sqrt{x\cdot\frac{۱}{x}}=۲$$

حالت برابری، برای $x=\frac{۱}{x}$، یعنی $x=۱$ است.

یادداشت. درحالت $x>۰$ به‌دست‌می‌آید: $x+\frac{۱}{x}\leqslant -۲$ و،بنابراین، نتیجه ۱ را مـی‌توان به‌این صورت بیـان‌کرد: مجمـوع هرعدد حقیقی بـا عکس خود، از لحاظ قدرمطلق، از ۲ کوچکتر نیست: $\left|x+\frac{۱}{x}\right|\geqslant ۲$.

نتیجهٔ ۲. اگرمجموع دوعدد مثبت، مقداری ثابت باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها، وقتی به حداکثر خود می‌رسدکه این دوعدد با هم برابر باشند.

برای دو عدد مثبت x و y فرض می‌کنیم: $x+y=a$ (a، مقـداری است‌ثابت). دراین صورت، بنابرنابرابری (۱) داریم:

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{۲} = \frac{a}{۲} \Longrightarrow xy \leqslant \frac{a^۲}{۴}$$

حداکثر مقدار xy برابر با $\frac{a^۲}{۴}$ است وبه‌ازای $y = x$ به‌دست می‌آید.

نتیجه ۳. (تعمیم نتیجهٔ ۱). اگر دوعدد مثبت، حاصل‌ضرب ثابتی‌داشته باشند، مجموع آن‌ها وقتی به‌حداقل مقدارخود می‌رسدکه این دو عدد با هم برابر باشند.

برای دوعدد مثبت x و y فرض می‌کنیم $xy = p$. دراین صورت، بنابر (۱)

$$\frac{x+y}{۲} \geqslant \sqrt{xy} = \sqrt{p} \Longrightarrow x+y \geqslant ۲\sqrt{p}$$

حداقل‌مقدار $x+y$ برابراست با $۲\sqrt{p}$ ووقتی بـه دست می‌آیدکـه داشته باشیم $x = y$.

مسأله ۱. ثابت‌کنید، برای هر $a > ۱$ داریم

$$\log a + \log_a ۱۰ \geqslant ۲$$

($\log a$ یعنی $\log_{۱۰} a$).

حل. می‌دانیم $\log_B A \cdot \log_A B = ۱$. بنابراین $\log_a ۱۰ = \frac{۱}{\log_a}$ و

$$\log a + \log_a ۱۰ = \log a + \frac{۱}{\log a} \geqslant ۲$$

حالت برابری وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم $a = ۱۰$.

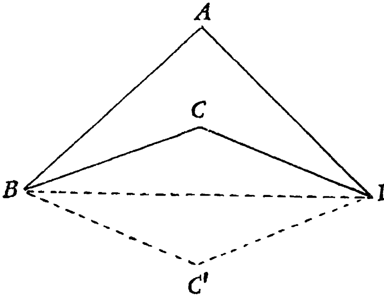
مسأله ۲. قطعه زمینی‌مستطیل شکل بامحیط برابر $۲p$ طوری انتخاب کنیدکه مساحت آن، حداکثر مقدارممکن باشد.

حل. طول و عرض زمین را a و b می‌گیریم ، بایـد داشته باشیم: $a+b = p$ وبنابرنابرابری (۱) داریم:

$$S = ab = (\sqrt{ab})^۲ \leqslant \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲ = \frac{p^۲}{۴}$$

حداکثر مساحت زمین برابر $\frac{p^۲}{۴}$ است ووقتی به‌این مساحت می‌رسدکه داشته باشیم $a=b=\frac{p}{۲}$. یعنی زمین را مربعی انتخاب کنیم.

یادداشت. مسأله را می‌توان به‌صورتی کلی‌تر طرح وحل کرد: ازبین چهارضلعی‌های بامحیط برابر p۲، مساحت کدامیك حداکثرمقدارممکن‌است؟



شکل ۴

روشن است که چهار ضلعی باید محدب باشد، زیرابرای چهار-ضلعی‌مقعر $ABCD$ می‌توان (باپیدا کردن قرینهٔ خط شکستهٔ BCD نسبت به خط راست BD) چهار-ضلعی محدب $ABC'D$ را باهمان محیط پیدا کردکه مساحتی بزرگتر داشته باشد.

درچهارضلعی محدب $ABCD$ فرض می‌کنیم:

$$|AB|=a،\ |BC|=b،\ |CD|=c،\ |DA|=d،\ S_{ABCD}=S$$

روشن است که

$$۲S=ab\sin\hat{B}+cd\sin\hat{D}\leqslant ab+cd،$$

$$۲S=ad\sin\hat{A}+bc\sin\hat{C}\leqslant ad+bc$$

علامت‌های برابری وقتی پیش می‌آیدکه داشته باشیم:

$$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=۹۰^\circ$$

ازمجموع این دونابرابری به‌دست می‌آید:

$$۴S\leqslant ab+cd+ad+bc=(a+c)(b+d)\leqslant$$

$$\leqslant\left[\frac{(a+\overset{c}{b})+(b+d)}{۲}\right]^۲=p^۲$$

یعنی $S\leqslant\frac{p^۲}{۴}$ و حالت برابری وقتی پیش می‌آیدکه در مستطیل $ABCD$

داشته باشیم $a+c=b+d$، یعنی وقتی که مربع باشد.

مسألهٔ ۳. a و b عددهایی مثبت‌اند، حداقل $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ چقدر است؟

حل. بنا بر نابرابری (۱) داریم:

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}, \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$$

که از ضرب آن‌ها در یکدیگر به‌دست می‌آید: $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$؛ در ضمن، به‌این حداکثر درحالت $a=b$ می‌رسیم.

مسألهٔ ۴. ثابت کنید، برای عددهای مثبت a و b داریم:

$$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

($\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ را واسطهٔ توافقی درعدد a و b گویند).

حل. نابرابری مفروض به‌سادگی به‌این صورت در می‌آید: $\frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}} \geqslant 1$. که درستی آن روشن است (درسمت راست نابرابری، بنا بر (۱)، صورت ازمخرج بزرگتر نیست).

به‌این ترتیب، برای واسطهٔ حسابی، واسطهٔ هندسی وواسطهٔ توافقی دو عدد مثبت a و b، همیشه داریم:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \qquad (2)$$

مسألهٔ ۵. ثابت کنید: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$. ($\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ را

واسطهٔ مربعی دوعدد a و b گویند).

حل. اگر دوطرف نابرابری مفروض را مجذور کنیم و همه جمله‌ها را به سمت چپ نابرابری بیاوریم، به‌سادگی به نابرابری روشن زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{4}(a-b)^2 \geqslant 0$$

به‌این ترتیب، برای هردوعدد مثبت a و b، همیشه داریم:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \qquad (3)$$

که برای $a=b$، همهٔ نابرابری‌ها، به‌برابری تبدیل می‌شوند.

مسألهٔ ۶. ابتدا ثابت کنید، برای عددهای مثبت a_1، a_2، b_1، b_2 داریم

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geqslant \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2} \qquad (4)$$

سپس، بااستفاده ازنابرابری (۴)، از بین مثلث‌های باقاعدهٔ مشترك AB که ارتفاعی برابر h داشته باشند، آن را پیدا کنید که محیط آن، حداقل مقدار ممکن باشد.

حل. اگر دوطرف نابرابری (۴) را مجذور کنیم، بعدازساده کردن به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)} \geqslant a_1a_2+b_1b_2$$

دوباره دوطرف نابرابری را مجذور می‌کنیم، پس‌ازساده‌کردن، به نابرابری روشن زیرمی‌رسیم:

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2 \geqslant 0$$

علامت برابری وقتی به‌دست می‌آید که $a_1b_2=a_2b_1$ یا $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$.

اکنون به حل مسألهٔ هندسی می‌پردازیم. پای ارتفاع وارد از رأس C برقاعدهٔ AB را H می‌گیریم و فرض می‌کنیم: $|AB|=c$، $|CH|=h$، $|AH|=x$ و $BH=y$. باتوجه به نابرابری (۴) می‌توان نوشت:

$$|CA|+|CB|=\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{y^2+h^2} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{(x+y)^2+4h^2}=\sqrt{c^2+4h^2}$$

یعنی حداقل محیط برابر $c+\sqrt{c^2+4h^2}$ است ووقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم $y=x$، یعنی وقتی‌که مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد.

مسألهٔ ۷. ثابت کنید:

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2)^2 \qquad (5)$$

حل. با بازکردن پرانتزها، به‌نابرابری روشن زیرمی‌رسیم:

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2\geqslant 0$$

دراین‌جا هم، حالت برابری وقتی پیش می‌آیدکه داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$$

§۲. نابرابری کوشی

درنابرابری (۱) بند قبل دیدیم $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$، یعنی‌واسطهٔ حسابی دوعدد مثبت، ازواسطهٔ هندسی آن‌هاکوچکتر نیست. این حکم برای n عدد مثبت هم درست است، یعنی اگر برای عددهای مثبت a_1، a_2، ...، a_n فرض‌کنیم:

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\quad G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

آن وقت $A_n\geqslant G_n$ و درحالت $a_1=a_2=\ldots=a_n$ به دست می‌آید $A_n=G_n$.

نابرابری $A_n\geqslant G_n$ (که «نابرابری کوشی» نامیده می‌شود)، یکی از مهم‌ترین نابرابری‌هاست ودراغلب شاخه‌های ریاضی کاربرد دارد. دراین‌جا روش‌های گوناگونی رابرای اثبات این‌نابرابری می‌آوریم واین، بیشتر بدان جهت است‌که خواننده، باشیوه‌های مختلف اثبات نابرابری‌ها آشنا شود. علاوه‌براین، دربخش‌های بعدی (ومثلاً دربخش کاربرد مشتق برای اثبات نابرابری‌ها) هم، باروش‌های اثبات دیگری آشنا خواهیم شد.

اثبات اول (براساس یك منطق ساده). ابتدا یك حقیقت ساده را ثابت می‌کنیم: اگر مجموع دوعدد مثبت، مقدار ثابتی باشد، هرچه دوعدد به هم نزدیکتر باشند، حاصل ضرب آن‌ها بزرگتر است.

این قضیه، درواقع، تعمیمی از نتیجهٔ ۲ بند قبل واثبات دیگری برای آن است.

a و b را دو عدد مثبت و $a<b$ می‌گیریم. اگر فرض کنیم $0<\varepsilon<b-a$، آن وقت

$$(a+\varepsilon)(b-\varepsilon)=ab+\varepsilon(b-a-\varepsilon)>ab$$

دوعدد a و b راطوری تغییر دادیم که، بدون تغییرمجموع آن‌ها، به‌هم نزدیکتر شوند، دراین صورت، حاصل ضرب آن‌ها بزرگترشد.

اکنون ثابت می‌کنیم (a_1، a_2، ...، $a_n>0$):

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}=G_n \qquad (6)$$

اگرهمهٔ عددهای a_i باهم برابر باشند، به سادگی به دست می‌آید $A_n=G_n$. بنابراین فرض می‌کنیم، بین این عددها، عددهای نابرابر وجود داشته باشد. اگر مثلاً a_1 را کوچکترین و a_2 را بزرگترین عدد، در بین عددهای a_1، a_2، ...، a_n، بگیریم، روشن است که $a_1<A_n$ و $a_2>A_n$.

به جای a_1، عدد A_n و به جای a_2 عدد $a_1+a_2-A_n$ را درنظر می‌گیریم؛ دراین‌صورت، بدون‌اینکه مجموع آنها تغییر کند، به‌هم نزدیك‌تر شده‌اند. بنابراین، واسطهٔ حسابی A_n تغییرنمی‌کند، درحالی‌که واسطهٔ هندسی G_n بزرگتر می‌شود. اگر بازهم، دربین عددهای جدید، عددهای نابرابر وجود داشته باشد، همین عمل‌را تکرارمی‌کنیم. از آن‌جاکه درهرگام، تعداد عددهای برابر A_n، افزایش می‌یابد، بعداز چندگام (که تعداد آن‌ها محدود است)، همهٔ عددها با هم برابر (وبرابر A_n) می‌شوند وبه حالتی می‌رسیم‌که، واسطهٔ‌حسابی آن‌ها، باواسطهٔ هندسی آن‌ها برابرمی‌شود. ولی‌درهرگام، واسطهٔ حسابی عددها بی‌تغییرمی‌ماند، درحالی‌که‌واسطهٔ هندسی آن‌ها بزرگترمی‌شود،

یعنی در انتخاب نخستین عددها، واسطهٔ حسابی از واسطهٔ هندسی بزرگتر است.

یادداشت. همین استدلال، درواقع، قضیهٔ دیگری را هم ثابت می‌کند که درواقع، تعمیم نتیجهٔ ۲ از بند قبل است: اگر مجموع n عدد مثبت مقداری ثابت باشد، حاصل ضرب آن‌ها وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که همهٔ این عددها، باهم برابر باشند.

اثبات دوم (براساس استقرای ریاضی*). ابتدا یك پیش‌قضیه را ثابت می‌کنیم.

پیش قضیه. اگر حاصل‌ضرب n عدد مثبت، برابر واحد باشد، مجموع آن‌ها از n کمتر نیست (واین، درواقع تعمیمی از نتیجهٔ ۱ بند قبل است).

پیش قضیه، برای $n=۲$ درست است (نتیجهٔ ۱ بند قبل را ببینید).

فرض می‌کنیم، برای $n=k$ و باشرط $a_۱a_۲ \dots a_k=۱$ داشته باشیم:

$$a_۱+a_۲+\dots+a_k \geqslant k$$

(فرض استقرا) و ثابت می‌کنیم، دراین‌صورت، باشرط $a_۱a_۲ \dots a_ka_{k+۱}=۱$ داریم:

$$a_۱+a_۲+\dots+a_k+a_{k+۱} \geqslant k+۱$$

اگر همهٔ عددهای $a_۱$، $a_۲$، ...، a_k، $a_{k+۱}$ برابر باشند:

$$a_۱=a_۲=\dots=a_k=a_{k+۱}=۱$$

آن وقت، مجموع آن‌ها برابر $k+۱$ می‌شود و پیش‌قضیه درست است.

حالتی را درنظر می‌گیریم که، در بین عددهای از $a_۱$ تا $a_{k+۱}$، عددهای نابرابر وجود داشته باشد، دراین‌صورت، در بین این عددها، دست‌کم یك عدد کوچکتر از واحد و یك عدد بزرگتر از واحد پیدا می‌شود (چرا؟). فرض می‌کنیم، مثلاً، $a_۱<۱$ و $a_{k+۱}>۱$. داریم:

$$(a_۱a_{k+۱})\cdot a_۲a_۳ \dots a_k=۱$$

---

*) برای آشنایی بیشتر با این روش، «روش استقرای ریاضی» را در شمارهٔ ۸ «کتاب‌های کوچك ریاضی» ببینید.

اگر $a_1 a_{k+1}$ را یك عدد به‌حساب آوریم، بنا بر فرض استقرا باید داشته باشیم:

$$a_1 a_{k+1} + a_2 + a_3 + \dots + a_k \geqslant k$$

ازاین‌جا می‌توان نوشت:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} =$$
$$= (a_1 a_{k+1} + a_2 + a_3 + \dots + a_k) + a_{k+1} - a_1 a_{k+1} + a_1 \geqslant$$
$$\geqslant k + a_{k+1} - a_1 a_{k+1} + a_1 = (k+1) + a_{k+1} - a_1 a_{k+1} +$$
$$+ a_1 - 1 = (k+1) + (a_{k+1} - 1)(1 - a_1) > k+1$$

زیرا $a_{k+1} > 1$ و $a_1 < 1$ و بنابراین $(a_{k+1} - 1)(1 - a_1) > 0$. پیش‌قضیه ثابت شد.

اکنون به‌اثبات حکم اصلی می‌پردازیم. داریم: $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ یعنی

$$1 = \sqrt[n]{\frac{a_1}{G_n} \cdot \frac{a_2}{G_n} \dots \frac{a_n}{G_n}} \Longrightarrow \frac{a_1}{G_n} \cdot \frac{a_2}{G_n} \dots \frac{a_n}{G_n} = 1$$

حاصل ضرب n عدد مثبت، برابر واحد شده‌است، بنابراین طبق پیش‌قضیه‌ای که ثابت کردیم، باید داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{G_n} + \frac{a_2}{G_n} + \dots + \frac{G_n}{G_n} \geqslant n$$

یعنی $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geqslant G_n$ یا $A_n \geqslant G_n$. و روشن است که علامت برابری، وقتی برقرار است که

$$\frac{a_1}{G_n} = \frac{a_2}{G_n} = \dots = \frac{a_n}{G_n} \Longrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

اثبات سوم (بازهم به کمك استقرای ریاضی). وقتی نابرابری $A_n \geqslant G_n$ برای $n=2$ برقرار باشد، برای $n=4$ هم برقرار است، زیرا

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}}\geqslant\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}}=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

به‌همین‌ترتیب،می‌توان‌ثابت‌کرد؛اگر $A_k\geqslant G_k$، آن‌وقت $A_{2k}\geqslant G_{2k}$. بنابراین نابرابری $A_n\geqslant G_n$ برای هرعدد n که توانی از ۲ باشد، برقرار است.

درحالت‌کلی فرض می‌کنیم $n+p=2^m$، دراین صورت، برای هر $n+p$ عدد، نابرابری‌کوشی برقرار است. ازاین $n+p$ عدد لازم، n عدد را a_1، a_2، ...، a_n؛ و p عدد دیگررا برابر یکدیگروبرابر A_n می‌گیریم. در نتیجه داریم:

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n+pA_n}{n+p}\geqslant\sqrt[n+p]{a_1a_2\dots a_n\cdot A_n^p}$$

که به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{nA_n+pA_n}{n+p}=A_n\geqslant\sqrt[n+p]{G_n^n\cdot A_n^p}$$

که اگردوطرف نابرابری رابه‌توان $n+p$ برسانیم، بعداز ساده‌کردن به‌دست می‌آید:

$$A_n^n\geqslant G_n^n\Longrightarrow A_n\geqslant G_n$$

اثبات چهارم (اثبات یك نابرابری قوی‌تر ازنابرابری‌کوشی). ثابت می‌کنیم:

$$\left(\frac{A_{k+1}}{G_{k+1}}\right)^{k+1}\geqslant\left(\frac{A_k}{G_k}\right)^k \qquad (7)$$

روشن‌است‌که ازنابرابری (۷) می‌توان نابرابری (۶) (یعنی‌نابرابری کوشی) را، باردیف نابرابری‌های زیر به‌دست آورد:

$$\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n \geqslant \left(\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}}\right)^{n-1} \geqslant \dots \geqslant \frac{A_1}{G_1} = 1$$

(طبق تعریف $A_1 = a_1$ و $G_1 = a_1$، در واقع، $A_1 = \frac{a_1}{1} = a_1$ و $G_1 = (a_1)^{\frac{1}{1}} = a_1$).

برای اثبات (۷)، ابتدا توجه می‌کنیم که $A_{k+1} = \frac{kA_k + a_{k+1}}{k+1}$ و $G_{k+1}^{k+1} = G_k^k a_{k+1}$. به‌ترتیب داریم:

$$\left(\frac{A_{k+1}}{G_{k+1}}\right)^{k+1} = \left(\frac{kA_k + a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} \cdot \frac{1}{G_k^k \cdot a_{k+1}} =$$

$$= \left(\frac{A_k}{G_k}\right)^k \cdot \frac{A_k}{a_{k+1}} \left(\frac{k + \frac{a_{k+1}}{A_k}}{k+1}\right)^{k+1}$$

فرض می‌کنیم $\alpha = \frac{a_{k+1}}{A_k}$، دراین صورت

$$\left(\frac{k+\alpha}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{\alpha - 1}{k+1}\right)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)\frac{\alpha-1}{k+1} = \alpha$$

(از نابرابری روشن $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ استفاده کرده‌ایم). بنابراین

$$\left(\frac{A_{k+1}}{G_{k+1}}\right)^{k+1} = \left(\frac{A_k}{G_k}\right)^k \cdot \frac{1}{\alpha}\left(\frac{k+a}{k+1}\right)^{k+1} \geqslant \left(\frac{A_k}{G_k}\right)^k$$

اثبات پنجم (استفاده از استقرای ریاضی به‌طور مستقیم). نابرابری $A_n \geqslant G_n$ برای $n = 2$ برقرار است. فرض می‌کنیم $A_k \geqslant G_k$ $(k > 2)$ و ثابت می‌کنیم، دراین صورت $A_{k+1} \geqslant G_{k+1}$.

با استفاده از نابرابری کوشی برای k عدد مثبت داریم:

$$A = \frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_{k+1} \cdot A_{k+1}^{k-1}} = G$$

یادآوری می‌کنیم که، با توجه به برابری سمت چپ داریم:

$A_{k+1}=\frac{A_k+A}{2}$ درنتیجه

$$A_{k+1}=\frac{A_k+A}{2}\geqslant\sqrt{A_k\cdot A}\geqslant\sqrt{G_k\cdot G}=$$

$$=\sqrt[2k]{G_{k+1}^{k+1}\cdot A_{k+1}^{k-1}}\geqslant\sqrt[2k]{G_{k+1}^{k+1}\cdot G_{k+1}^{k-1}}=G_{k+1}$$

اثبات ششم (به‌کمك بسط دوجمله‌ای). فرض می‌کنیم نابرابری کوشی برای $n=m$ برقرار باشد، یعنی $A_m\geqslant G_m$. اکنون $m+1$ عدد a_1، a_2، …، a_m، a_{m+1} را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم a_{m+1}، بزرگترین آن‌ها باشد (از بین این $m+1$ عدد، آن را که ازهمه بزرگتر است a_{m+1} می‌نامیم). چون

$$A_{m+1}=\frac{mA_m+a_{m+1}}{m+1} \quad \text{و} \quad a_{m+1}=A_m+b \quad (b>0)$$

پس $A_{m+1}=A_m+\frac{b}{m+1}$، یعنی

$$A_{m+1}^{m+1}=\left(A_m+\frac{b}{m+1}\right)^{m+1}\geqslant A_m^{m+1}+(m+1)A_m^m\cdot\frac{b}{m+1}=$$

$$=A_m^m(A_m+b)=a_m^m\cdot a_{m+1}\geqslant G_m^m\cdot a_{m+1}=G_{m+1}^{m+1}$$

اثبات هفتم (استقرای ریاضی). فرض می‌کنیم $a_i=x_i^n$ ($i=1, 2, \dots, n$). دراین صورت، فرض استقرا، یعنی

$$a_1+a_2+\dots+a_m\geqslant m\sqrt[m]{a_1a_2\dots a_m}$$

به صورت $x_1^m+x_2^m+\dots+x_m^m\geqslant mx_1x_2\dots x_m$ درمی‌آید و باید ثابت کنیم:

$$x_1^{m+1}+x_2^{m+1}+\dots+x_{m+1}^{m+1}\geqslant(m+1)x_1x_2\dots x_{m+1}$$

باتوجه به‌نابرابری روشن $(a^{n-1}-b^{n-1})(a-b)\geqslant 0$ برای دو عدد مثبت a و b داریم:

$$a^n+b^n\geqslant a^{n-1}b+ab^{n-1} \qquad (*)$$

برای هر دو عدد x_i و x_j ($1 \leqslant i < j \leqslant m+1$)، نابرابری (*) را به‌ازای $n=m+1$ می‌نویسیم، و، سپس، نابرابری‌های حاصل را باهم جمع می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$m(x_1^{m+1}+x_2^{m+1}+\dots+x_{m+1}^{m+1}) \geqslant x_1(x_2^m+x_3^m+\dots+x_{m+1}^m)+$$
$$+x_2(x_1^m+x_3^m+\dots+x_{m+1}^m)+\dots+x_{m+1}(x_1^m+x_2^m+\dots+$$
$$+x_m^m) \geqslant x_1 \cdot m x_2 x_3 \dots x_{m+1} + x_2 \cdot m x_1 x_3 \dots x_{m+1} + \dots +$$
$$+x_{m+1} \cdot m x_1 x_2 \dots x_m = m(m+1) x_1 x_2 \dots x_{m+1}$$

که از آن جا، به‌نابرابری موردنظر می‌رسیم.

مسألهٔ ۸. ثابت کنید نابرابری $\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 4$ برای $x \in \mathbf{R}$ همیشه برقرار است.

حل. کسر سمت چپ نابرابری را تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{\sqrt{x^2+1} \times \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}}=2 \times 2=4$$

علامت برابری، وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم:

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{4}{\sqrt{x^2+1}} \Longleftrightarrow x^2=3 \quad \text{یا} \quad x=\pm\sqrt{3}$$

مسألهٔ ۹. حداکثر مقدار کسر $\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ را برای $x>0$ پیدا کنید.

حل. داریم:

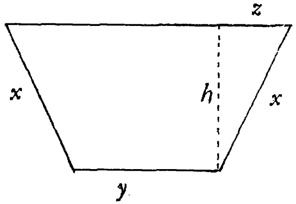
$$\frac{x^n}{1+x^{2n}}=\frac{1}{\frac{1}{x^n}+x^n}$$

که با توجه به‌نابرابری $x^n+\frac{1}{x^n} \geqslant 2$، به‌دست می‌آید $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \leqslant \frac{1}{2}$

(علامت برابری، برای $x=۱$ است).

مسألهٔ ۱۵. ازبین ذوزنقه‌های متساوی‌الساقینی که، در آن‌ها، مجموع طول‌های دوساق وقاعدهٔ کوچکتر مقداری ثابت است، کدامیك حداکثرمساحت را دارد؟

حل. طول هریك ازساق‌ها را x و وطول قاعدهٔ کوچکتر را y می‌گیریم. بنابر فرض مسأله، مجموع $۲x+y$ مقدارثابتی است، آن را a می‌نامیم:



شکل ۵

$$۲x+y=a$$

اگر تفاوت طول‌های دو قاعده را z، ارتفاع ذوزنقه را h ومساحت آن را S بنامیم، داریم:

$$۴S^۲=[y+(y+۲z)]^۲\cdot h^۲=(۲y+۲z)^۲(x^۲-z^۲)=$$

$$=۴(y+z)^۲(x+z)(x-z)=\frac{۴}{۳}(y+z)(y+z)(x+z)(۳x-۳z)$$

چهار عامل عبارت اخیر، مجموع ثابتی دارند:

$$(y+z)+(y+z)+(x+z)+(۳x-۳z)=۲(۲x+y)=۲a$$

بنابراین، حاصل ضرب آنها وقتی به حداکثرمقدار خــود می‌رسد (یادداشت اثبات اول را ببینید)، که با هــم برابر باشند. ازآن جا به سادگی بــه دست می‌آید: $x=y=۲z$. باتوجه‌به‌مقدار z معلوم می‌شودکه، هریك‌اززاویه‌های مجاور به‌قاعدهٔ کوچکترذوزنقه برابر ۱۲۰ درجه می‌شود، یعنی ذوزنقه عبارت است ازنیمی ازیك شش ضَلعی منتظم.

یادداشت. ضمن حل مسأله ازاین قضیه استفاده کردیم که: حاصل‌ضرب چند عدد مثبتی که مجموعی ثابت داشته باشند، وقتی به حداکثر خود می‌رسد که این عددها باهم برابر باشند. در واقع برای عددهای مثبت $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n همیشه داریم(نابرابری کوشی):

$$a_1 a_2 \cdots a_n \leqslant \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n = \left(\frac{A}{n}\right)^n$$

(مجموع عددها را A گرفته‌ایم). حاصل‌ضرب عددها، همیشه از $\left(\frac{A}{n}\right)^n$ کوچکتر است و تنها درحالت برابری عددها با آن برابر می‌شود: حداکثر حاصل‌ضرب برابراست با $\left(\frac{A}{n}\right)^n$ ووقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

عکس این قضیه هم درست است: اگر حاصل ضرب چند عدد مثبت مقدار ثابتی باشد، مجموع آن‌ها وقتی به حداقل مقدار خود می‌رسد که این عددها باهم برابر باشند.

در واقع، اگر حاصل ضرب n عدد مثبت a_1، a_2، ...، a_n را q بگیریم، داریم:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqslant n\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = n\sqrt{p}$$

حداقل مجموع برابر $n\sqrt{p}$ است و وقتی به دست می‌آید که a_i ها با هم برابر باشند.

مسألهٔ ۱۱. ثابت کنید، برای عددهای مثبت a_1، a_2، ...، a_n همیشه داریم:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} \geqslant n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}$$

که از ضرب آن‌ها در یکدیگر، به نابرابری مورد نظر می‌رسیم (حالت برابری،

موقعی پیش می‌آید که همهٔ عددهای $a_۱$، ...، a_n با هم برابر باشند).

مسألهٔ ۱۲. حداکثر مقدار تابع $y=x(۹-x)^۲$ را، با شرط $۰<x<۹$ پیدا کنید.

حل. داریم: $۲y=۲x(۹-x)(۹-x)$. عامل‌های $۲x$، $۹-x$ و $۹-x$، با توجه به‌شرط مسأله، مقدارهایی مثبت‌اند ومجموعی ثابت دارند:

$$۲x+(۹-x)+(۹-x)=۱۸$$

بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها، وقتی به‌حداکثر مقدارخود می‌رسد که این‌عامل‌ها باهم برابر باشند:

$$۲x=۹-x \Longrightarrow x=۳$$

تابع y دربازهٔ $(۰، ۹)$، به‌ازای $x=۳$ به حداکثرمقدار خود می‌رسد و این حداکثر برابر است با ۱۰۸.

مسألهٔ ۱۳. به‌شرط $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{۲}$ ثابت کنید:

$$\frac{۱}{\sin^۲\alpha}+\frac{۱}{\sin^۲\beta}+\frac{۱}{\sin^۲\gamma}\geqslant ۱۲$$

حل. درتمرین ۲۸ ثابت کردیم، به شرط، $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqslant\frac{۱}{۸}\Longrightarrow\frac{۱}{\sin^۲\alpha\sin^۲\beta\sin^۲\gamma}\geqslant\frac{۱}{۶۴}$$

وباتوجه به نابرابری کوشی به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{\sin^۲\alpha}+\frac{۱}{\sin^۲\beta}+\frac{۱}{\sin^۲\gamma}\geqslant ۳\sqrt[۳]{\frac{۱}{\sin^۲\alpha\sin^۲\beta\sin^۲\gamma}}\geqslant ۳\sqrt[۳]{۶۴}=۱۲$$

در حالت $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{۶}$، نابرابری به برابری تبدیل می‌شود.

مسألهٔ ۱۴. بااستفاده از نابرابری کوشی، درستی نابرابری‌های نپر را ثابت کنید (قضیهٔ ۱ فصل اول را ببینید).

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3,\quad n=2,3,4,\ldots$$

حل. نابرابری‌های کلی‌تری را ثابت می‌کنیم که نابرابری‌های نپسر نتیجه‌ای از آن‌هاست:

به‌شرط $k\leqslant n$، $k\in\mathbf{N}$ و $n\in\mathbf{N}$، این نابرابری‌ها برقرارند:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}\qquad(*)$$

ابتدا، نابرابری سمت چپ راثابت می‌کنیم. این n عدد را درنظرمی‌گیریم:

$$\underbrace{1+\frac{1}{k},\ 1+\frac{1}{k},\ \ldots,\ 1+\frac{1}{k}}_{\text{مرتبه } k},\quad \underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{\text{مرتبه } (n-k)}$$

ونابرابری کوشی را دربارهٔ آن‌ها می‌نویسیم:

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\cdot 1^{n-k}}\leqslant\frac{k\left(1+\frac{1}{k}\right)+n-k}{n}$$

ویا بعداز ساده‌کردن

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\leqslant 1+\frac{1}{n}\Longrightarrow\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

برای اثبات نابرابری سمت راست $(*)$، نابرابری کوشی را برای $n+k+1$ عدد

$$\underbrace{\frac{k}{k+1},\ \frac{k}{k+1},\ \ldots,\ \frac{k}{k+1}}_{\text{مرتبه } (k+1)},\quad \underbrace{1+\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n},\ \ldots,\ 1+\frac{1}{n}}_{\text{مرتبه } n}$$

می‌نویسیم که به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[k+n+1]{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}<\frac{(k+1)\frac{k}{k+1}+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{k+n+1}=1$$

یعنی

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<1\Longrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

که برای عددهای طبیعی و دلخواه k و n برقرار است.

اکنون، اگر درنابرابری سمت چپ (*)، فرض کنیم $k=2$، به دست می‌آید:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}>2 \quad , \quad n=2, 3, 4, \ldots$$

واگر درنابرابری سمت راست (*)، $k=5$ بگیریم:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(\frac{6}{5}\right)^{6}<3 \quad , \quad n\in\mathbf{N}$$

وچون $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$، باتوجه به‌این نابرابری‌ها، خواهیم داشت:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}<e<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} \quad , \quad k\in\mathbf{N}$$

مثلا بافرض $k=200$، بااستفاده ازجدول‌های لگاریتمی پنج رقمی، به‌دست می‌آید:

$$2/718<e<2/719$$

مسألهٔ ۱۵. وجه‌های یك چهار وجهی، هم‌ارزند (مساحت‌هایی برابر دارند). اگر زاویه‌های دووجهی مجاور به‌یکی‌از وجه‌ها را، α، β، و γ بنامیم ثابت کنید:

$$1)\ \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqslant\frac{1}{27}\ ,\quad 2)\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\geqslant\frac{1}{3}$$

حل. تصویر رأس D از چهاروجهی $ABCD$ را بر وجه ABC با حرف D_1 نشان می‌دهیم و مثلث‌های BCD_1، CAD_1، ABD_1 را در نظر می‌گیریم. بنا بر فرض داریم:

$$S_{BCD_1}=S_{BCD}\cos\alpha \text{ ، } S_{CAD_1}=S_{CAD}\cos\beta \text{ ، } S_{ABD_1}=S_{ABD}\cos\gamma$$

ازمجموع این سه برابری، با توجه به‌این که چهاروجه این چهاروجهی مساحت‌هایی برابر دارند، به دست می‌آید:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$$

(اگر مساحت مثلث‌های جهت‌دار BCD_1، CAD_1 و ABD_1 را در نظر بگیریم، تصویر نقطهٔ D، یعنی D_1، به‌هر وضعی باشد، این برابری درست است).

اگر α، β و γ، زاویه‌هایی حاده باشند، آن‌وقت $\cos\alpha>0$، $\cos\beta>0$، $\cos\gamma>0$، و با استفاده از نابرابری کوشی به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[3]{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\leqslant\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}=\frac{1}{3}$$

یعنی $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqslant\frac{1}{27}$.

درحالت منفرجه بودن یکی‌از زاویه‌های α، β، و γ، درستی نابرابری روشن‌است، زیرا سمت چپ نابرابری منفی می‌شود.

برای اثبات درستی نابرابری دوم، ابتدا ثابت می‌کنیم، برای هرسه عدد مثبت a، b و c همیشه داریم:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geqslant\frac{a+b+c}{3} \qquad (**)$$

(یعنی واسطهٔ مربعی سه‌عدد مثبت، از واسطهٔ حسابی آن‌ها، کوچکتر نیست). اگر دوطرف نابرابری (**) را مجذور کنیم وهمهٔ جمله‌ها را به‌سمت چپ نابرابری بیاوریم، سرانجام به‌نابرابری روشن زیر می‌رسیم:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$$

که حالت تساوی برای $a=b=c$ پیش می‌آید.

با توجه به نابرابری (**) می‌توان نوشت:

$$\sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{3}}\geqslant\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}=\frac{1}{3}$$

و یا $\frac{1}{3} \geqslant \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$.

اگر مثلاً $\gamma > 90^\circ$، آن‌وقت

$\cos\alpha+\cos\beta+(-\cos\gamma)=1-2\cos\gamma$ و

$$\sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{3}}>\frac{\cos\alpha+\cos\beta+(-\cos\gamma)}{3}=$$

$$=\frac{1-2\cos\gamma}{3}>\frac{1}{3}$$

از آن‌جا که نقطهٔ D_1 برمحل برخورد سه ارتفاع مثلث $A_1B_1C_1$ ــ که از گستردهٔ چهاروجهی مفروض به‌دست می‌آید ــ قراردارد و از آن‌جا که این گسترده تنها می‌تواند مثلثی بازاویه‌های حاده باشد، بنابراین، بین زاویه‌های α، β و γ، نمی‌تواند دوزاویهٔ منفرجه وجود داشته باشد. درحالت خاصی‌هم که یکی‌ازسه زاویهٔ دووجهی قائمه باشد، هردو نابرابری برقرارند.

§ ۳. واسطه‌های دیگر

اگر درعدد حقیقی a و b $(a<b)$ را درنظر بگیریم، بی‌نهایت عدد حقیقی x وجود دارد، به نحوی‌که داشته باشیم: $a<x<b$. هریك از این عددهای x، واسطه‌ای‌برای دوعدد a و b به‌شمارمی‌روند. به‌طورکلی: برای n عددحقیقی a_1، a_2، ...، a_n، هرمقداری‌که بین‌کوچکترین‌وبزرگترین‌این‌عددها باشد، واسطهٔ آن‌ها گویند (که البته، این‌واسطه درحالت خاص، می‌تواند بر یکی‌ازاین n عدد وازجمله، کوچکترین یا بزرگترین آن‌ها هم منطبق باشد). اگر در بین‌این n عدد، دست‌کم‌دوعدد مختلف‌وجود داشته‌باشد، تعداد واسطه‌ها بی‌نهایت می‌شود. ولی در بین این بی‌نهایت عدد واسطه، آن‌هایی اهمیت دارندکه ضمن انجام عمل‌هایی روی خود n عدد به دست آیند. مشهورترین

این واسطه‌ها، واسطهٔ توانی است که با این دستور معین می‌شود:

$$C_\alpha = C_\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

که در آن، α عددی است حقیقی ومخالف صفر.

حالت‌های خاصی‌ازواسطهٔ توانی، نسبت به‌بقیه، به‌علت‌کاربردهای‌خود، شهرت بیشتری پیداکرده‌اند وآن‌ها را واسطه‌های کلاسیک می‌نامند. مثلاً

$$C_1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\ , \quad C_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}\ ,$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

ازجملهٔ واسطه‌های کلاسیک‌اندکه، به ترتیب، واسطهٔ حسابی، واسطهٔ توافقی و واسطهٔ مربعی نامیده می‌شوند. یکی دیگرازواسطه‌های کلاسیک مشهور، واسطهٔ هندسی است که‌آن را با C_0 نشان می‌دهند و این، به‌دلیل آن است که

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \underset{\alpha \to 0}{\text{حد}}\, C_\alpha$$

اثبات درستی این حد دشوارنیست، تنها به‌این شرط‌که مشتق تابع‌های a^x، $\ln u$ رابدانیم:

$$y = a^x \Longrightarrow y' = a^x \cdot \ln a$$

$$y = \ln u \Longrightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

اکنون اگر ازرابطهٔ C_α لگاریتم بگیریم (درمبنای طبیعی) بسه دست می‌آید:

$$\ln C_\alpha = \frac{\ln(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha) - \ln n}{\alpha}$$

وقتی α به‌سمت صفر میل کند، این کسر به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درمی‌آید که می‌توان با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، از آن رفع ابهام کرد. داریم:

$$\lim_{\alpha \to 0} \ln C_\alpha = \lim_{\alpha \to 0} \frac{a_1^\alpha \ln a_1 + a_2^\alpha \ln a_2 + \cdots + a_n^\alpha \ln a_n}{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha} =$$

$$= \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} = \frac{1}{n} \ln(a_1 a_2 \cdots a_n)$$

و بنابراین $\lim_{\alpha \to 0} C_\alpha = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

مقدارهای واسطه‌ای اغلب و ضمن حل بسیاری از مسأله‌های ریاضی، فیزیک و سایر دانش‌ها، حتی در تازه‌ترین دانش‌های امروزی پدید می‌آیند. دربارهٔ واسطهٔ حسابی، بسیار برخورد کرده‌اید: معدل نمره‌های امتحانی، میانگین درجهٔ حرارت،... در این‌جا، چند موردی را نام می‌بریم که، در آن‌ها، با واسطهٔ توافقی برخورد می‌کنیم.

۱) اگر از محل برخورد دوقطر ذوزنقه‌ای خط راستی موازی دوقاعدهٔ آن رسم کنیم تا دوساق ذوزنقه را در نقطه‌های M و N قطع کند، آن وقت

$$|MN| = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

که در آن، a و b را طول دوقاعدهٔ ذوزنقه گرفته‌ایم.

درضمن می‌دانید، اگر وسط دوساق را به هم وصل می‌کردیم، پاره خط راستی به دست می‌آمد که طول آن، برابر واسطهٔ حسابی طول‌های دو قاعده می‌شد.

۲) اگر اتومبیلی فاصلهٔ از A تا B را با سرعت ثابت v_1 و در برگشت فاصلهٔ از B تا A را با سرعت ثابت v_2 بپیماید، آن وقت سرعت متوسط حرکت اتومبیل برابر است با

$$\frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$$

۳) اگر تراکتور اول، زمینی را درمدت t_1 ساعت و تراکتور دوم، همان زمین رادرمدت t_2 ساعت شخم کند، آن‌وقت به‌اندازهٔ

$$t=\frac{2}{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}}$$

ساعت وقت لازم است تا دوتراکتور، ضمن کار هم زمان، بتوانند زمین را شخم بزنند.

۴) دووزنه به‌وزن‌های m_1 و m_2 به‌وسیلهٔ نخی به هم وصل شده‌اند، نخ را ازروی قرقره‌ای‌گذرانده‌ایم. اگر نخ کش‌دار نباشد، آن وقت نیروی کشش نخ به‌همان اندازه‌ای است که دردوسر آن وزنه‌های برابر، قرار داشته باشد، به نحوی‌که وزن هروزنه برابر باواسطهٔ توافقی m_1 و m_2 باشد.

۵) جداری ازدوتیغهٔ با ضخامت برابر ومماس برهم تشکیل شده‌است. جنس تیغه‌ها،متفاوت و ضریب قابلیت هدایت‌گرما درآن‌ها، به‌ترتیب، برابر k_1 و k_2 است. دراین صورت، ضریب قابلیت هدایت‌گرما در جدار برابر است با $\frac{2}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}}$.

□

اکنون به‌مقایسهٔ واسطه‌های مختلف می‌پردازیم.

قضیهٔ ۱. ثابت‌کنید، به‌شرط $\alpha \leqslant \beta$ داریم $C_\alpha \leqslant C_\beta$. درضمن برابری $C_\alpha = C_\beta$ وقتی، وتنها وقتی برقراراست که داشته‌باشیم $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ (a_iها، عددهایی مثبت‌اند).

اثبات. قضیه را درسه حالت جداگانه ثابت می‌کنیم.

حالت اول: $\alpha < 0$ و $\beta > 0$. واسطهٔ هندسی n عدد مثبت، از واسطهٔ حسابی آن‌ها، بزرگتر نیست، یعنی

$$\sqrt[n]{a_1^\alpha a_2^\alpha \cdots a_n^\alpha} \leqslant \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} \qquad (*)$$

دوطرف این نابرابری را به توان $\frac{1}{\alpha}$ می‌رسانیم؛ از آن‌جا که $\frac{1}{\alpha}<0$، بنابراین

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geqslant \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = C_\alpha$$

اکنون نابرابری $(*)$ را برای β می‌نویسیم:

$$\sqrt[n]{a_1^\beta a_2^\beta \cdots a_n^\beta} \leqslant \frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}$$

β عددی است مثبت، بنابراین، اگر دو طرف این نابرابری را به توان $\frac{1}{\beta}$ برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} = C_\beta$$

به‌این‌ترتیب، برای $\alpha<0$ و $\beta>0$، C_α از واسطهٔ هندسی کوچکتر و C_β از واسطهٔ هندسی بزرگتر است، یعنی $C_\alpha \leqslant C_\beta$.

حالت دوم: $0<\alpha<\beta$. ثابت می‌کنیم $\frac{C_\beta}{C_\alpha} \geqslant 1$. داریم:

$$\frac{C_\beta}{C_\alpha} = \left[\frac{\left(\frac{a_1}{C_\alpha}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{C_\alpha}\right)^\beta + \cdots + \left(\frac{a_n}{C_\alpha}\right)^\beta}{n}\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

که اگر فرض کنیم: $t_1 = \left(\frac{a_1}{C_\alpha}\right)^\alpha$ ، $t_2 = \left(\frac{a_2}{C_\alpha}\right)^\alpha$، ...، $t_n = \left(\frac{a_n}{C_\alpha}\right)^\alpha$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{C_\beta}{C_\alpha} = \left(\frac{t_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + t_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + t_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \qquad (\mathrm{I})$$

از طرف دیگر داریم:

$$\left(\frac{t_1+t_2+\cdots+t_n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left[\frac{\left(\frac{a_1}{C_\alpha}\right)^\alpha+\left(\frac{a_2}{C_\alpha}\right)^\alpha+\cdots+\left(\frac{a_n}{C_\alpha}\right)^\alpha}{n}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=\frac{1}{C_\alpha}\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{C_\alpha}\cdot C_\alpha=1$$

بنابراین $t_1+t_2+\cdots+t_n=n$. اگر فرض کنیم:

$$t_1=1+x_1,\ t_2=1+x_2,\ \ldots,\ t_n=1+x_n$$

با توجه به برابری $t_1+t_2+\cdots+t_n=n$ نتیجه می‌شود:

$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$. چون $\frac{\beta}{\alpha}>1$ و $x_i>-1$، بنابراین (یادداشت را در پایان اثبات ببینید):

$$(*)\quad\begin{cases} t_1^{\frac{\beta}{\alpha}}=(1+x_1)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geqslant 1+\frac{\beta}{\alpha}x_1\\ t_2^{\frac{\beta}{\alpha}}=(1+x_2)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geqslant 1+\frac{\beta}{\alpha}x_2\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ t_n^{\frac{\beta}{\alpha}}=(1+x_n)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geqslant 1+\frac{\beta}{\alpha}x_n \end{cases}$$

که از مجموع آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$t_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+t_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+\cdots+t_n^{\frac{\beta}{\alpha}}\geqslant n+\frac{\beta}{\alpha}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=n\qquad(\mathrm{II})$$

اکنون از (I) و (II) نتیجه می‌شود:

$$\frac{C_\beta}{C_\alpha}\geqslant\left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}=1\Longrightarrow C_\beta\geqslant C_\alpha$$

حالت سوم: $0>\beta>\alpha$. استدلال کاملاً شبیه حالت دوم است، تنها دراین جا به دلیل $1>\frac{\beta}{\alpha}>0$، نابرابری‌های (*) درجهت عکس برقرارند و، بنابراین، به‌دست می‌آید:

$$t_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+t_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+\dots+t_n^{\frac{\beta}{\alpha}}\leqslant n$$

وازآن‌جا، باتوجه به‌منفی بودن β:

$$\frac{C_\beta}{C_\alpha}=\left(\frac{t_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+t_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+\dots+t_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\geqslant\left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}=1\Longrightarrow C_\beta\geqslant C_\alpha$$

ازقضیه‌ای‌که ثابت‌کردیم، نتیجه می‌شود:

$$C_{-1}\leqslant C_0\leqslant C_1\leqslant C_2$$

مثلاً، برای دوعدد مثبت a و b وبا شرط $a\leqslant b$، همیشه داریم:

$$a\leqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leqslant b$$

که درحالت $a=b$، نابرابری‌ها، به‌برابری تبدیل می‌شوند.

یادداشت. ضمن اثبات قضیه، ازنابرابری‌های(*) ونابرابری‌های‌مشابه آن استفاده‌کردیم که نیاز به اثبات دارند. مسألهٔ زیر، این نیاز را برطرف می‌کند.

مسألهٔ ۱۶. بافرض $x\geqslant -1$ ثابت‌کنید، به شرط $1>\alpha>0$ داریم:

$$(1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha x$$

وبه شرط $\alpha<0$ یا $\alpha>1$ داریم:

$$(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x$$

علامت برابری، درهردوحالت، برای $x=0$ است.

حل. ابتدا $\alpha=\frac{m}{n}$ و m و n را عددهایی طبیعی و $1\leqslant m<n$ می‌گیریم. با توجه به‌شرط $1+x\geqslant 0$ داریم:

$$(1+x)^{\alpha}=(1+x)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(1+x)^{m}}=$$

$$=\sqrt[n]{\underbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{\text{مرتبه } m}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot1\cdots1}_{\text{مرتبه } n-m}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(1+x)+(1+x)+\cdots+(1+x)+1+1+1+\cdots+1}{n}=$$

$$=\frac{m(1+x)+n-m}{n}=\frac{n+mx}{n}=1+\frac{m}{n}x=1+\alpha x$$

و علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم: $1+x=1$ یا $x=0$.

به حالتی می‌پردازیم که α عددی گنگ باشد و $0<\alpha<1$. دنبالهٔ عددهای گویای

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots$$

را باشرط $0<r_i<1$، طوری درنظر می‌گیریم که حدی برابر α داشته باشد. چون r_n عددی گویاست، بنابراین

$$(1+x)^{r_n}\leqslant 1+r_n x\ ,\ (x\geqslant -1,\ n=1,2,3,\ldots)$$

درنتیجه

$$(1+x)^{\alpha}=\lim_{r_n\to\alpha}(1+x)^{r_n}\leqslant\lim_{r_n\to\alpha}(1+r_n x)=1+\alpha x$$

دراین‌جا، برای کامل بودن اثبات، هنوز باید ثابت‌کنیم، اگر α عددی گنگ، $0<\alpha<1$ و $x\neq 0$، آن‌گاه $(1+x)^{\alpha}<1+\alpha x$ که دراین

صورت علامت برابری تنها برای $x=0$ باقی می‌ماند. عدد گویای r را با شرط $\alpha<r<1$ درنظر می‌گیریم. داریم:

$$(1+x)^\alpha=[(1+x)^{\frac{\alpha}{r}}]^r$$

چون $0<\frac{\alpha}{r}<1$، به‌ترتیب داریم:

$$(1+x)^\alpha=[(1+x)^{\frac{\alpha}{r}}]^r\leqslant\left[\left(1+\frac{\alpha}{r}x\right)\right]^r<$$

$$<1+r\cdot\frac{\alpha}{r}x=1+\alpha x$$

اکنون باید بخش دوم مسأله را حل کنیم، یعنی فرض می‌کنیم $\alpha>1$ یا $\alpha<0$.

اگر $1+\alpha x<0$، آن‌وقت نابرابری $(1+x)^\alpha\geqslant1+\alpha x$، برای هردوحالت $\alpha<0$ و $\alpha>1$ روشن است. بنابراین باید به‌حالت $1+\alpha x\geqslant0$ یا $\alpha x\geqslant-1$ بپردازیم.

اگر $\alpha>1$، آن وقت باتوجه به‌بخش قبلی مسأله داریم:

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant1+\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha x=1+x$$

که اگر دوطرف آن‌را به‌توان α برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$(1+x)^\alpha\geqslant1+\alpha x$$

اگر $\alpha<0$ آن‌وقت عدد طبیعی n را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $-\frac{\alpha}{n}<1$. دراین‌صورت، باتوجه به‌بخش‌اول مسأله داریم:

$$(1+x)^{-\frac{\alpha}{n}}\leqslant1-\frac{\alpha}{n}x,$$

دوطرف این‌نابرابری را معکوس می‌کنیم، باتوجه به‌نابرابری روشن

$1-\frac{\alpha^۲}{n^۲}\geqslant ۱$، به‌دست می‌آید:

$$(۱+x)^{\frac{\alpha}{n}}\geqslant\frac{۱}{۱-\frac{\alpha}{n}x}\geqslant ۱+\frac{\alpha}{n}x$$

که اگر دو طرف آن را به‌توان n برسانیم، به‌نابرابری مطلوب می‌رسیم:

$$(۱+x)^{\alpha}\geqslant\left(۱+\frac{\alpha}{n}x\right)^{n}\geqslant ۱+n\cdot\frac{\alpha}{n}x=۱+\alpha x$$

و در همهٔ این موردها، علامت برابری تنها به‌ازای $x=۰$ برقرار است.

□

کلاس دیگری از مقدارهای واسطه‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم که، به‌نوبهٔ خود، کمتر از کلاس C_{α} جالب نیست و، به‌ویژه، در رابطهٔ با آن، می‌توان به‌نتیجه‌های جالبی رسید. این کلاس، با این دستور داده می‌شود:

$$d_{\alpha}=d_{\alpha}(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)=\frac{a_۱^{\alpha}+a_۲^{\alpha}+\ldots+a_n^{\alpha}}{a_۱^{\alpha-۱}+a_۲^{\alpha-۱}+\ldots+a_n^{\alpha-۱}}$$

که در آن، $a_۱$، $a_۲$، …، a_n عددهایی مثبت‌اند و $\alpha\in\mathbf{R}$. در ضمن، توجه می‌کنیم که

$$d_۱=\frac{a_۱+a_۲+\ldots+a_n}{n}=C_۱,$$

$$d_۰=\frac{n}{\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\ldots+\frac{۱}{a_n}}=C_{-۱}$$

ابتدا باید ثابت کنیم که d_{α}، درواقع یک مقدار واسطه است؛ یعنی اگر $a_۱$ کوچکترین و a_n بزرگترین عدد از بین عددهای $a_۱$، $a_۲$، …، a_n باشند، داریم:

$$a_۱\leqslant\frac{a_۱^{\alpha}+a_۲^{\alpha}+\ldots+a_n^{\alpha}}{a_۱^{\alpha-۱}+a_۲^{\alpha-۱}+\ldots+a_n^{\alpha-۱}}\leqslant a_n$$

که به‌دلیل سادگی، اثبات آن‌را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

مثل C_α، کلاس واسطه‌های d_α هم، دارای ویژگی یکنوائی‌است، یعنی قضیهٔ ۲. با شرط $\alpha<\beta$، نابرابری $d_\alpha \leqslant d_\beta$ برقراراست؛ در ضمن علامت برابری وقتی، وتنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$a_1 = a_2 \cdots = a_n$$

اثبات. چون $\beta-\alpha>0$ ، بنابراین به شرط $a_i \neq a_j$، تفاضل‌های a_i-a_j و $a_j^{\beta-\alpha}-a_i^{\beta-\alpha}$، علامت مختلفی دارند ودر نتیجه

$$(a_i \cdot a_j)^{\alpha-1}(a_i-a_j)(a_j^{\beta-\alpha}-a_i^{\beta-\alpha}) \leqslant 0$$

که از آن به‌دست‌می‌آید: $a_i^\alpha a_j^{\beta-1}+a_j^\alpha a_i^{\beta-1} \leqslant a_i^\beta a_j^{\alpha-1}+a_j^\beta a_i^{\alpha-1}$

بنابراین $\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_i^\alpha a_j^{\beta-1}+a_j^\alpha a_i^{\beta-1}) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_i^\beta a_j^{\alpha-1}+a_j^\beta a_i^{\alpha-1})$

که درواقع، به‌معنای درستی نابرابری زیر است:

$$(a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha)(a_1^{\beta-1}+a_2^{\beta-1}+\cdots+a_n^{\beta-1}) \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta)(a_1^{\alpha-1}+a_2^{\alpha-1}+\cdots+a_n^{\alpha-1})$$

از آن جا نتیجه می‌شود: $d_\alpha \leqslant d_\beta$ و علامت برابری برای $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

قضیهٔ ۳. اگر $0 \leqslant \alpha$، آن وقت $d_\alpha \leqslant C_{\alpha-1}$؛ اگر $1>\alpha>0$، آن وقت $C_\alpha \leqslant d_\alpha \leqslant C_{\alpha-1}$؛ اگر $1<\alpha$، آن وقت $C_\alpha \leqslant d_\alpha$. علامت‌های برابری، وقتی و تنها وقتی پیش می‌آید که یا $\alpha=0$، یا $\alpha=1$ و یا $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

اثبات. این دو برابری واضح‌اند:

$$\frac{(C_\alpha)^\alpha}{(C_{\alpha-1})^{\alpha-1}}=d_\alpha \quad \text{و} \quad \left(\frac{C_\alpha}{C_{\alpha-1}}\right)^{\alpha-1} \cdot C_\alpha = d_\alpha$$

بنابرقضیهٔ ۱، $0<C_{\alpha-1} \leqslant C_\alpha$، یا $\frac{C_\alpha}{C_{\alpha-1}} \geqslant 1$. از آن جا

اگر $\alpha<1$، آن وقت $1 \leqslant \left(\frac{C_\alpha}{C_{\alpha-1}}\right)^{\alpha-1} > 0$ وبنابراین $C_\alpha \geqslant d_\alpha$؛

اگر $1 < \alpha$، آن‌وقت $1 \leqslant \left(\frac{C_\alpha}{C_{\alpha-1}}\right)^{\alpha-1}$ و بنابراین $C_\alpha \leqslant d_\alpha$.

علاوه بر این، اگر $0 < \alpha$ آن‌وقت $1 \leqslant \left(\frac{C_\alpha}{C_{\alpha-1}}\right)^{\alpha} > 0$ و از آن‌جا

$$\frac{(C_\alpha)^\alpha}{(C_{\alpha-1})^{\alpha-1}} \leqslant C_{\alpha-1} \Longrightarrow d_\alpha \leqslant C_{\alpha-1};$$

و اگر $0 \geqslant \alpha$، با استدلال مشابهی به دست می‌آید: $d_\alpha \leqslant C_{\alpha-1}$. در همهٔ حالت‌ها، علامت برابری، تنها برای موردهایی پیش می‌آید که درصورت قضیه آمده است.

از همین قضیه می‌توان نتیجه گرفت که عدد ε، با شرط $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$، وجود دارد، به‌نحوی‌که داشته باشیم $d_\varepsilon = C_0$. مثلاً، برای حالت $n = 2$ داریم: $d_{\frac{1}{2}} = C_0$.

اکنون، باتوجه به‌قضیه‌هایی‌که ثابت‌کردیم، برای حالت $n = 2$، این رشته نابرابری‌ها را خواهیم داشت:

$$d_{-1} \leqslant C_{-2} \leqslant C_{-1} = d_0 \leqslant d_{\frac{1}{2}} = C_0 \leqslant d_1 = C_1 \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \leqslant d_2 \leqslant d_3 \ldots$$

یعنی، برای عددهای مثبت a و b و باشرط $a \leqslant b$ داریم:

$$a \leqslant \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2} \leqslant \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} \leqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leqslant \frac{a^2+b^2}{a+b} \leqslant \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} \leqslant b \qquad (7)$$

قضیهٔ ۴. ثابت‌کنید، برای هر α و هر دو عدد مثبت a و b داریم:

$$d_{\alpha+1} + d_{1-\alpha} = a+b,\quad d_{\alpha+1} \cdot d_{-\alpha} = ab,\quad C_\alpha \cdot C_{-\alpha} = ab$$

اثبات ساده است وخودتان آن را به دست بیاورید.

□

به‌جز C_α و d_α، می‌توان دستورهای دیگری هم، برای محاسبهٔ مقدار واسطه‌ها پیدا کرد. یکی از این دستورها را می‌آوریم. فرض کنید:

$$f_{\alpha,\beta}=\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

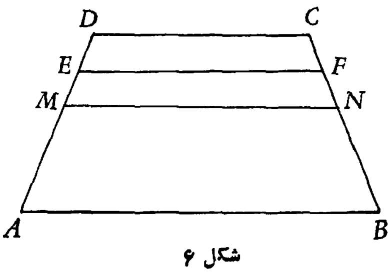
که در آن $\alpha\neq\beta$ و a_1، a_2، ...، a_n عددهایی مثبت‌اند. بـه سادگی می‌توان ثابت کرد (و از خواننده می‌خواهیم، این اثبات را پیدا کند) کـه: ۱) $f_{\alpha,\beta}$، کلاسی از واسطه‌هاست، یعنی اگر a_1 کوچکترین و a_n بزرگترین عدد از بین عددهای a_1، a_2، ...، a_n باشند، آن‌وقت $a_1\leqslant f_{\alpha,\beta}\leqslant a_n$؛ ۲) کلاس‌های C_α و d_α حالت‌های خاصی از کلاس $f_{\alpha,\beta}$ هستند؛ ۳) $f_{\alpha,\beta}$ نسبت بـه α (با ثابت بودن β) و نسبت به β (با ثابت بودن α)، تابعـی یکنوا (مونوتون) است.

§۴. تعبیر هندسی

نابرابری‌های (۷) را می‌توان تعبیر هندسی کرد. نمـونه‌ای از تعبیـر هندسی نابرابری $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ را دیدیم، و در این‌جا به بقیهٔ نابرابری‌های (۷) می‌پردازیم.

ابتدا این مسألهٔ سادهٔ هندسی را حل کنید:

مساله. پاره خط‌های راست EF و MN را در درون ذوزنقهٔ $ABCD$، محدود به‌دوساق وموازی با قاعده‌های AB و CD رسم کرده‌ایم.



شکل ۶

ثابت کنید: ۱) شرط لازم وکافی، برای متشابه بودن ذوزنقهٔ $ABFE$ و $MNCD$ و، همچنین، تشابه دو ذوزنقهٔ $ABNM$ و $EFCD$ این است که

داشته باشیم:

$$|EF|\cdot|MN|=|AB|\cdot|CD|$$

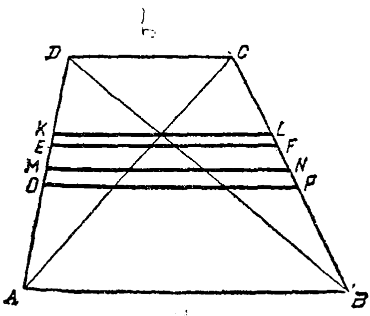
۲) شرط لازم وکافی برای برابری فاصلهٔ بین $[AB]$ و $[EF]$ با فاصلهٔ بین $[MN]$ و $[CD]$ این است که داشته باشیم:

$$|EF|+|MN|=|AB|+|CD|$$

اکنون به تعبیر هندسی نابرابری‌های (۷) می‌پردازیم. برای نابرابری‌های

$$\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{۲}\leqslant\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}} \qquad (۸)$$

اغلب از روش زیر استفاده می‌کنند. ذوزنقهٔ $ABCD$ را با قاعده‌های $|AB|=a$ و $|CD|=b$ در نظر می‌گیریم (شکل ۷). اگر پاره‌خط راست EF را موازی با قاعده‌های ذوزنقه، طوری رسم کنیم که دو ذوزنقهٔ متشابه به‌دست آید، آن‌وقت



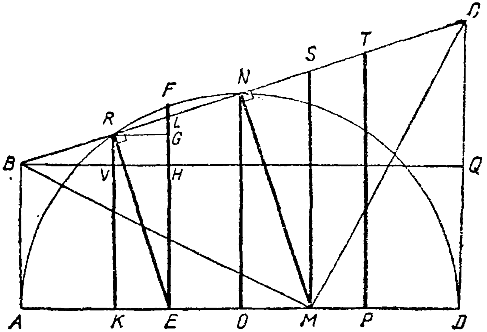
شکل ۷

$$|EF|\cdot|EF|=ab \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow |EF|=\sqrt{ab}$$

سپس، اگر M و N، به ترتیب، وسط ساق‌های AD و BC باشند، آن وقت $|MN|=\frac{a+b}{۲}$. اگر پاره‌خط راست KL را موازی دوقاعده از محل برخورد قطرها بگذرانیم، داریم: $|KL|=\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$ (چرا؟)، چون $|MN|\cdot|KL|=ab$، بنابراین، دو زوج ذوزنقهٔ متشابه به دست می آید و، در نتیجه، $[EF]$ بین $[MN]$ و $[KL]$ قرار می‌گیرد. سرانجام، پاره خط راست OP را موازی دو قاعده طوری می‌رسانیم که داشته باشیم

$|OP|=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. پـاره خط راست OP، ذوزنقه را بـه دو ذوزنقهٔ هم‌ارز (با مساحت‌های برابر) تقسیم می‌کند (چـرا؟)، بنابرایـن $[OP]$ بین $[MN]$ و $[AB]$ واقع می‌شود. به این ترتیب است که رشته نابرابری های (۸) به‌دست می‌آید.

اکنون کوشش می‌کنیم، همهٔ رشتهٔ نابرابری‌های (۷) را بسازیم.



شکل ۸

ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ را با قاعده‌های $a=|AB|$ و $b=|CD|$ $(a<b)$ و ارتفاع $|AD|=a+b$ درنظرمی‌گیریم (شکل ۸). فـرض کنید $|AE|=a$ و $|AO|=|OD|=\frac{a+b}{2}$. (ON) را عمـود بـر (AD) و $|ON|=\frac{a+b}{2}$ را رسم می‌کنیم (پاره خط راستی که وسط دوساق را به هم وصل می‌کند). به این ترتیب، نقطه‌های A، N و D روی محیط دایره‌ای بـه شعاع $\frac{a+b}{2}$ و به مرکز O واقع‌اند. R را نقطهٔ برخـورد دوم این دایره با خط راست BC می‌گیریم. این ساختمان‌ها را، پشت سرهم، انجام می‌دهیم:

$$(EF)\perp(AD),\ (RK)\,||\,(EF),\ [DP]\cong[AK],$$

$$|DM|=|AE|=a,\ (MS)\perp(AD),\ (PT)\,||\,(MN),\ [MN],\ [ER]$$

واین برابری‌ها را ثابت می‌کنیم:

$$|KR|=d_{-۱},\ |ER|=C_{-۲},\ |EL|=d_{۰},\ |EF|=d_{\frac{۱}{۲}},$$

$$|ON|=d_{۱},\ |MN|=C_{۲},\ |MS|=d_{۲},\ |PT|=d_{۳},$$

$$\widehat{ERL}=\widehat{MNS}=۹۰^\circ$$

برای اثبات، (RG) و (BQ) راموازی (AD) رسم می‌کنیم. برابری $|ON|=d_{۱}$، ازخود ساختمان آن نتیجه می‌شود. به‌جز آن

$$|BN|=|NC|=\frac{۱}{۲}|BC|=\frac{۱}{۲}\sqrt{|BQ|^{۲}+|QC|^{۲}}=\sqrt{\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۲}},$$

$$|AB|^{۲}=|BN|\cdot|BR|$$

ازآنجا $|BR|\cdot\sqrt{\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۲}}=a^{۲}$ وبنابراین $|BR|=\dfrac{a^{۲}}{\sqrt{\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۲}}}$.

باتوجه به تشابه مثلث‌های BRV و BCQ

$$\frac{|KR|-|KV|}{|CQ|}=\frac{|BR|}{|BC|}\Longrightarrow\frac{|KR|-a}{b-a}=\frac{\dfrac{a^{۲}}{\sqrt{\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۲}}}}{۲\sqrt{\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۲}}}$$

درنتیجه $d_{-۱}=\dfrac{ab(a+b)}{a^{۲}+b^{۲}}=|KR|$.

به همین ترتیب، ازتشابه دومثلث BLH و BCQ به‌دست می‌آید:

$$\frac{|EL|-|EH|}{|BH|}=\frac{|CQ|}{|RQ|}\Longrightarrow\frac{|EL|-a}{a}=\frac{b-a}{a+b}$$

ازآن‌جا $d_{۰}=\dfrac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}=\dfrac{۲ab}{a+b}=|EL|$.

سپس، باتوجه به تشابه مثلث‌های RLG و BCQ نتیجه می‌شود:

$$\frac{|LG|}{|RG|}=\frac{|CQ|}{|BQ|}\Longrightarrow\frac{d_{۰}-d_{-۱}}{|RG|}=\frac{b-a}{a+b}$$

از آن جا $|RG|=\frac{ab(b-a)}{a^{۲}+b^{۲}}$. چون $|RG|=|KE|$، بنابراین

$$|ER|=\sqrt{|KR|^{۲}+|KE|^{۲}}=\frac{ab}{\sqrt{\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۲}}}=C_{-۲}$$

ازمثلث ONM به‌دست می‌آید:

$$|MN|=\sqrt{|ON|^{۲}+|OM|^{۲}}=\sqrt{\left(\frac{a+b}{۲}\right)^{۲}+\left(\frac{b-a}{۲}\right)^{۲}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۲}}=C_{۲}$$

از تعبیر هندسی، به‌یاد می‌آوریم که

$$|EF|=\sqrt{|AE|\cdot|ED|}=\sqrt{ab}=d_{\frac{۱}{۲}}$$

با توجه به قضیهٔ ۴ ومسألهٔ هندسی آغاز § ۴، نتیجه می‌شود:

$$|MS|=d_{۲} \text{ و } |PT|=d_{۳}$$

برابری مربوط به زاویه‌ها را ثابت می‌کنیم. چون دومثلث ABM و DMC برابرند (در دو ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه)، پس $|BM|=|MC|$، یعنی دو مثلث BMN و CMN (در سه ضلع) برابرند و بنابراین $\widehat{MNB}=\widehat{MNC}=۹۰^{\circ}$. سپس، چون $\frac{|KR|}{|KE|}=\frac{|RE|}{|EF|}$ (که با محاسبهٔ مستقیم تایید می‌شود) و $\widehat{KRE}=\widehat{REF}$، بنابراین دومثلث KRE و REL متشابه‌اند ودراین‌صورت

$$\widehat{LRE}=\widehat{RKE}=۹۰^{\circ}$$

به‌این ترتیب، با توجه به‌شکل ۸، همهٔ مقدارهای زنجیرهٔ نابرابری‌های (۷) و درستی آن‌ها، نشان داده شد.

توجه به‌این نکته هم جالب است که، روی شکل ۸، چهارضلعی $ABRE$ با چهارضلعی‌های $ABNM$ و $MNCD$ (که با هم برابرند) متشابه است (چرا؟). علاوه بر این، در این شکل می‌توان چند زوج ذوزنقه‌های متشابه هم پیدا کرد (پیدا کنید!).

تمرین

۶۱. از بین مکعب مستطیل‌هایی که، مجموع سه یال دو به دو عمود بر هم در آن‌ها، مقداری ثابت باشد، کدامیك حداکثر حجم را دارد؟

۶۲. a و b عددهایی مثبت‌اند و $a \neq b$. ثابت کنید:

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a+nb}{n+1}$$

۶۳. برای عددهای مثبت a_1، a_2، ...، a_n ثابت کنید:

$$a_1 a_2 \cdots a_n \leqslant \frac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n}{n}$$

۶۴. برای عددهای مثبت x و y می‌دانیم $a = x^3 + y^3$. حداکثر هر یك از مقدارهای $x^2 + y^2$ و $x + y$ چقدر است؟

۶۵. برای عددهای مثبت x و y و z می‌دانیم: $x + y + z = 6$. حداقل مقدار $x^2 + y^3 + z$ را پیدا کنید.

۶۶. a_1، a_2، ...، a_n عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید به‌شرط $\alpha \geqslant 1$

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^\alpha \leqslant n^{\alpha - 1}(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha)$$

و به شرط $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^\alpha \geqslant n^{\alpha - 1}(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha)$$

۶۷. x و y و z عددهایی مثبت‌اند و می‌دانیم $x^3 + y^3 + z^3 = 81$. ثابت کنید:

$$x+y+z\leqslant ۹$$

۶۸. به شرط $۰>\alpha>-۱$ ثابت کنید:

$$\frac{(n+۱)^{\alpha+۱}-n^{\alpha+۱}}{\alpha+۱}<n^{\alpha}<\frac{n^{\alpha+۱}-(n-۱)^{\alpha+۱}}{\alpha+۱}$$

۶۹. حداقل مقدار تابع $ax-x^{\alpha}$ را با شرط $a>۰$، $x\geqslant ۰$ و $\alpha>۱$ پیدا کنید.

۷۰. برای $x\in\mathbf{R}$ ثابت کنید: $\sin x\sin ۲x\leqslant\frac{۴}{۹}\sqrt{۳}$.

۷۱. حداقل مقدار تابع $x^{\alpha}+ax$ را با شرط $a>۰$، $x>۰$ و $۰<\alpha$ پیدا کنید.

۷۲. حداکثر تابع $x^{\alpha}-ax$ را با شرط $a>۰$، $x\geqslant ۰$ و $۱>\alpha>۰$ پیدا کنید.

۷۳. کدام بزرگترند: $\sqrt[n]{n}$ یا $۱+\frac{۲}{\sqrt{n}}$؟ (n عددی طبیعی است).

۷۴. به شرط طبیعی بودن n، کدام بزرگترند: $\frac{۱}{\sqrt{n}}$ یا $\sqrt{n+۱}-\sqrt{n-۱}$؟

۷۵. زاویه‌های یك مثلث را α، β و γ می‌نامیم. ثابت کنید، به شرط حاده بودن همهٔ زاویه‌ها، داریم:

$$۱)\qquad tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\gamma tg\alpha\geqslant ۹$$

$$۲)\qquad cotg\alpha cotg\beta cotg\gamma\leqslant\frac{\sqrt{۳}}{۹}$$

۷۶. x و y و z عددهایی مثبت‌اند، ثابت کنید:

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}\geqslant ۸$$

۷۷. a و b و c را طول ضلع‌ها، S را مساحت و R و r را به ترتیب طول شعاع دایره‌های محیطی ومحاطی مثلث می‌گیریم. ثابت کنید:

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 8S(2R-r)$$

۷۸. a_1، a_2، …، a_n عددهایی طبیعی‌اند، ثابت کنید:

$$|a_1+a_2+\dots+a_n| \leqslant |a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|$$

۷۹. A، B و C را سه زاویهٔ حادهٔ یك مثلث می‌گیریم. ثابت کنید:

$$tg^n A+tg^n B+tg^n C > 3+\frac{3n}{2} \qquad (n\in \mathbf{N})$$

۸۰. می‌دانیم $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{3}$. ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)} \geqslant \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

۸۱. a و b و c را طول ضلع‌ها و S را مساحت مثلث می‌گیریم. ثابت کنید:

$$ab+bc+ca \geqslant 4S\sqrt{3}$$

۸۲. آیا عددهای a، b و c وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم:

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} > \sqrt{c(ab+1)}$$

۸۳. ضریب‌های a و b و c را در چندجمله‌ای

$$x^5-10x^4+ax^3+bx^2+cx-32$$

طوری پیدا کنید که همهٔ ریشه‌های آن حقیقی و مثبت باشند.

۸۴. ثابت کنید در هر مثلث ABC، داریم:

$$\sqrt[3]{\frac{R}{2S^2}} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

که در آن، S مساحت، R شعاع دایرهٔ محیطی و h_a و h_b و h_c ارتفاع‌های مثلث‌اند.

۸۵. عدد سه رقمی $\overline{xyz}$ را پیدا کنید به شرطی که

$$\overline{xyz}=xyz(x+y+z)$$

۸۶. n عددی طبیعی است. ثابت کنید:

$$\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}+\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}}\leqslant 2\sqrt[n]{n}$$

۸۷. ثابت کنید:

$$\frac{1}{2^{k-1}}\leqslant(\sin x)^{2k}+(\cos x)^{2k}\leqslant 1 \qquad (k\in\mathbf{N})$$

۸۸. محلول یك نمك را در دو ظرف مختلف ریخته‌ایم: در ظرف اول ۵ کیلوگرم و در ظرف دوم ۲۰ کیلوگرم. ضمن بخار شدن آب، درصد نمك در ظرف اول p برابر و در ظرف دوم q برابر شده است و می‌دانیم $pq=9$. حداکثر چه مقدار آب ممکن است از این دو ظرف بخار شده باشد؟

۸۹. $C_\alpha(a, b)$ را واسطهٔ توانی بین دو عدد مثبت a و b می‌گیریم. ثابت کنید:

$$1)\ \ C_\alpha(a, b)\cdot C_{-\alpha}(a, b)=C_0^2(a, b);$$

$$2)\ \ C_\alpha(a, b):C_\alpha\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)=C_0^2(a, b)$$

۹۰. ۱) به شرط $x\geqslant 1$ و $n\in\mathbf{N}$ ثابت کنید:

$$x^n\geqslant nx-n+1;$$

۲) به شرط $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\dots\leqslant a_n$، برای $1<k\leqslant n$ داریم:

الف) $A_{k-1}\leqslant A_k$؛ ب) $A_n\leqslant a_n$؛ ج) $a_k\leqslant\dfrac{A_k^k}{A_{k-1}^{k-1}}$

که در آن‌ها $n\in\mathbf{N}$، $k\in\mathbf{N}$ و A_n به معنای واسطهٔ حسابی بین n عدد از a_1 تا a_n است.

۳) اگر G_n را واسطهٔ هندسی بین n عدد مثبت $a_1\leqslant a_2\leqslant\dots\leqslant a_n$

بگیریم، ثابت کنید، برای $1 < k \leqslant n$ داریم:

الف) $G_{k-1} \leqslant G_k$؛ ب) $G_n \leqslant a_n$؛ ج) $kG_k - (k-1)G_{k-1} \leqslant a_k$

۴) اگر a_1، a_2، ...، a_n عددهایی غیرمنفی و r_1، r_2، ...، r_n عددهایی گویا و بزرگتر از واحد و $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} = 1$، ثابت کنید:

$$\frac{a_1^{r_1}}{r_1} + \frac{a_2^{r_2}}{r_2} + \dots + \frac{a_n^{r_n}}{r_n} \geqslant a_1 a_2 \cdots a_n$$

فصل سوم

نابرابری‌های دیگر

۱. نابرابری دیگری از کوشی. در فصل دوم، § ۱، مسألهٔ ۷ ثابت کردیم:

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2)^2$$

این نابرابری را می‌توان تعمیم داد و برای n عدد حقیقی a_1، a_2، …، a_n و n عدد حقیقی b_1، b_2،…، b_n نوشت:

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant$$
$$\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

این نابرابری را هم، برای نخستین بار، کوشی ثابت کرد و، به‌همین مناسبت، نام اورا برخود دارد. نابرابری کوشی را می‌توان به‌این ترتیب تنظیم کرد:

قضیهٔ ۱. اگر a_i و b_i عددهایی حقیقی باشند $(i=1,2,\dots,n)$، ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\times\sum_{i=1}^{n}b_i^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 \qquad (1)$$

درضمن، علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آیدکه داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$$

یعنی وقتی‌که a_i ها با b_i ها متناسب باشند.

اثبات. درمسألهٔ ۷ فصل اول دیدیم که نابرابری

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2\geqslant 0$$

به‌نابرابری روشن زیرمنجرمی‌شود: $(a_1b_2-a_2b_1)^2\geqslant 0$

وعلامت برابری، برای $a_1b_2=a_2b_1$ یا $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ پیش می‌آید.

اگر $n=3$ بگیریم، بازهم به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2=$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2\geqslant 0$$

وبرای این‌که علامت برابری برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$a_1b_2-a_2b_1=a_1b_3-a_3b_1=a_2b_3-a_3b_2=0$$

ویا $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.

درحالت کلی هم، با اندکی محاسبه ودقت، به‌دست می‌آید:

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\dots$$
$$\dots+a_nb_n)^2\ \dots+a_nb_n)^2-(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2+\dots$$
$$=(a_1a_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\dots+$$
$$+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2$$

در پرانتزهای مجذورکامل سمت راست برابری، باید همهٔ حالت‌های ممکن انتخاب و دواندیس مختلف را درنظرگرفت. این تعداد برابر است با $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$؛ یعنی درسمت راست برابری، به‌تعداد $\frac{n(n-1)}{2}$ مجذور کامل‌وجود دارد. روشن است که این مجموع همیشه مثبت است، مگر وقتی‌که داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$$

مسألهٔ ۱۷. نقطهٔ $M(x,y)$ را روی دایرهٔ $x^2+y^2=1$ طوری پیدا کنیدکه مقدار $12x+5y$ به‌حداکثرمقدارخود ویا به‌حداقل مقدارخود برسد.

حل. درواقع، مسأله می‌خواهد به‌شرط $x^2+y^2=1$، حداکثر و حداقل مقدار $12x+5y$ را پیداکنند.

نابرابری‌کوشی را برای $n=2$ در نظرمی‌گیریم وفرض می‌کنیم: $a_1=12$، $a_2=5$، $b_1=x$، $b_2=y$. دراین صورت داریم:

$$(12^2+5^2)(x^2+y^2)\geqslant(12x+5y)^2 \Longrightarrow (12x+5y)^2\leqslant 169$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید: $-13\leqslant 12x+5y\leqslant 13$.

حداکثرمقدارممکن برای $12x+5y$ برابر ۱۳ وحداقل ممکن برای آن برابر ۱۳- است؛ ومی‌دانیم، این حداکثر یا حداقل، وقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم:

$$\frac{x}{12}=\frac{y}{5}$$

که باتوجه به‌معادلهٔ $x^2+y^2=1$ به‌دست می‌آید:

$$M_1\left(\frac{12}{13},\ \frac{5}{13}\right),\ M_2\left(-\frac{12}{13},\ -\frac{5}{13}\right)$$

حداکثر مقدار $12x+5y$ روی دایرهٔ $x^2+y^2=1$ درنقطهٔ M_1 وحداقل آن درروی دایره، درنقطهٔ M_2 خواهد بود.

۲. درمسألهٔ ۶ فصل اول ثابت کردیم:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}\geqslant\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

اکنون آن را برای n عدد a_i و n عدد b_i تعمیم می‌دهیم.

قضیهٔ ۲. ثابت‌کنید، برای عددهای مثبت a_1، a_2، ...، a_n و b_1، b_2، ...، b_n همیشه داریم:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\dots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geqslant\sqrt{a^2+b^2} \qquad (2)$$

که درآن $a=a_1+a_2+\dots+a_n$ و $b=b_1+b_2+\dots+b_n$. علامت برابری، تنها برای وقتی است که داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$$

اثبات. خط شکستهٔ $A_0A_1\dots A_n$ را روی صفحه ودردستگاه محورهای قائم مختصات طوری درنظر می‌گیریم که بردار $\overrightarrow{A_0A_1}$ به مختصات $(a_1،b_1)$، بردار $\overrightarrow{A_1A_2}$ به‌مختصات $(a_2،b_2)$، و به‌طورکلی، بردار $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ به مختصات $(a_i،b_i)$ باشد. درضمن، روشن است که

$$\overrightarrow{A_0A_n}=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\dots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

یعنی‌مختصات بردار $\overrightarrow{A_0A_n}$ چنین است:

$$(a_1+a_2+\dots+a_n\ ,\ b_1+b_2+\dots+b_n)=(a،b)$$

طول بردارها را محاسبه می‌کنیم:

$$|A_0A_1|=\sqrt{a_1^2+b_1^2}\ ،\ |A_1A_2|=\sqrt{a_2^2+b_2^2}\ ،\dots،$$

$$|A_{n-1}A_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\ ;\ |A_0A_n|=\sqrt{a^2+b^2}$$

می‌دانیم طول یك خط شکسته از طول پاره خط راستی‌که دوانتهای آن را به هم وصل می‌کند، بزرگتر است، یعنی

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\geqslant\sqrt{a^2+b^2}$$

درضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که بردارهای $\overrightarrow{A_0A_1}$ ، $\overrightarrow{A_1A_2}$ ،...، $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ هم جهت باشند، یعنی داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$$

یادداشت. اگر $i=\sqrt{-1}$ و $x+iy$ را عدد مختلط درنظر بگیریم، می‌دانیم

$$|x+iy|=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$$

به‌این ترتیب، می‌توانیم نابرابری قضیهٔ ۲ را به‌این صورت بنویسیم:

$$|a_1+ib_1|+|a_2+ib_2|+\cdots+|a_n+ib_n|\geqslant$$
$$\geqslant|(a_1+a_2+\cdots+a_n)+i(b_1+b_2+\cdots+b_n)|$$

۳. دو نابرابری دیگر

قضیهٔ۳. برای عددهای مثبت a_1، a_2، ...، a_n و b_1، b_2، ...، b_n و با فرض $a=a_1+a_2+\cdots+a_n$ ، $b=b_1+b_2+\cdots+b_n$ داریم:

$$\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\cdots+\sqrt{a_nb_n}\leqslant\sqrt{ab} \qquad (3)$$

وعلامت برابری، تنها برای $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

اثبات. با توجه به‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی داریم:

$$\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{a_1b_1}{ab}}$$

$$\frac{a_2}{a}+\frac{b_2}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{a_2b_2}{ab}}$$

. . . .

$$\frac{a_n}{a}+\frac{b_n}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{a_nb_n}{ab}}$$

اکنون اگر $a_1+a_2+\cdots+a_n=a$ و $b_1+b_2+\cdots+b_n=b$ بگیریم، ازمجموع این نابرابری‌ها، به‌همان نابرابری (۳) می‌رسیم. درضمن، برای این‌که همه‌جا علامت برابری داشته باشیم، باید

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$$

قضیهٔ ۴. با همان شرطهای قضیه ۳، ثابت کنید

$$\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2b_2}{a_2+b_2}+\dots+\frac{a_nb_n}{a_n+b_n}\leqslant\frac{ab}{a+b} \qquad (4)$$

و برابری برای $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$.

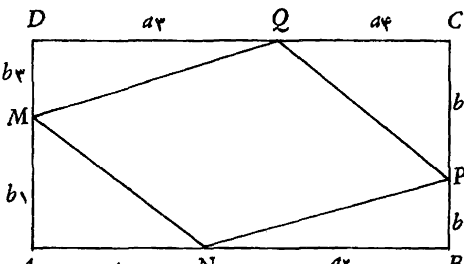
راهنمایی. این نابرابری به‌ازای $n=2$ به‌صورت

$$\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2b_2}{a_2+b_2}\leqslant\frac{(a_1+a_2)(b_1+b_2)}{a_1+a_2+b_1+b_2}$$

درمی‌آید که منجر به‌نابرابری روشن $0\leqslant(a_1b_2-a_2b_1)^2$ می‌شود. برای اثبات درحالت کلی، می‌توانید ازروش استقرای ریاضی استفاده‌کنید.

مسألهٔ ۱۸. درمستطیلی‌که طول قطر آن برابر است با d، یك چهارضلعی محاط کنیدکه حداقل ممکن محیط را داشته باشد.

حل. فرض می‌کنیم، چهارضلعی $MNPQ$ را در مستطیل $ABCD$ محاط کرده باشیم (شکل ۹). پاره خط‌های راستی که به‌وسیلهٔ رأس‌های چهارضلعی، روی‌ضلع‌های مستطیل پدید می‌آید، مطابق شکل، نام‌گذاری می‌کنیم. اگرطول مستطیل را a وعرض آن را b بگیریم، داریم:



شکل ۹

$$a_1+a_2=a_3+a_4=a \quad , \quad b_1+b_3=b_2+b_4=b \; ;$$
$$a_1+a_2+a_3+a_4=2a \quad , \quad b_1+b_2+b_3+b_4=2b$$

اگرمحیط چهارضلعی را با P نشان دهیم، روشن است که

$$P=\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\sqrt{a_3^2+b_3^2}+\sqrt{a_4^2+b_4^2}$$

وبنابراین، باتوجه به‌نابرابری (۲) داریم:

$$P \geqslant \sqrt{(a_1+a_2+a_3+a_4)^2+(b_1+b_2+b_3+b_4)^2}=$$
$$=\sqrt{(2a)^2+(2b)^2}=2\sqrt{a^2+b^2}=2d$$

یعنی حداقـل محیط چهارضلعی محاطی برابر $2d$ است ووقتی به‌این حداقل می‌رسدکه داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{a_4}=\frac{a}{b}$$

به‌این ترتیب، هرچهارمثلث واقع درگوشه‌های مستطیل باهم وبا مثلث ABC متشابه می‌شوند، یعنی ضلع‌های روبه‌رو درچهارضلعی $MNPQ$ باهم موازی و، درنتیجه، چهارضلعی $MNPQ$ یك متوازی‌الاضلاع می‌شود.

اگر بخواهیم چهارضلعی را باحداقل محیط درمستطیل به‌قطر d محاط کنیم، باید چهارضلعی را به‌صورت متوازی‌الاضلاع درنظر بگیریم.

۴. نابرابری چه‌بیشف.

قضیهٔ۴. مـی‌دانیم: $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$ و $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$

ثابت‌کنید:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (5)$$

علامت برابری برای $n=1$ یا $x_1=x_2=\cdots=x_n$ ویا $y_1=y_2=\cdots=y_n$.

اثبات. در واقع، باتوجه به‌شرطهای قضیه، باید ثابت‌کنیم:

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$

درحالت $n=1$ بـه‌برابری $x_1y_1=x_1y_1$ ودرحالت برابری x_iها وبرابری y_iها به برابری $nx_1y_1=nx_1y_1$ می‌رسیم. در ضمن، در حـالت خاص $n=2$ به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$x_1y_1+x_2y_2 \geqslant \frac{1}{2}(x_1+x_2)(y_1+y_2)$$

که بعد ازتبدیل‌های لازم، به‌نـابرابری روشن $(x_1-x_2)(y_1-y_2) \geqslant 0$

منجر می‌شود.

برای اثبات نابرابری (۵) درحالت‌کلی، توجه می‌کنیم که برای واسطهٔ حسابی عددهای x_1، x_2، ...، x_n، داریم: $x_1 \geqslant A_n \geqslant x_n$ که در آن

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

بنابراین، مقدار A_n درجایی بین x_1 و x_n قرار دارد:

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_k \geqslant A_n \geqslant x_{k+1} \geqslant \cdots \geqslant x_n$$

از این‌جا می‌توان نتیجه‌گرفت

$$(x_i - A_n)(y_i - y_k) \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (*)$$

(اگر $i<k$، آن‌وقت $x_i > A_n$ و $y_i > y_k$ واگر $i>k$، آن وقت $x_i < A_n$ و $y_i < y_k$).

اگر درنابرابری (*)، i را به ترتیب برابر ۱، ۲، ...، n بگیریم و نابرابری‌های حاصل را باهم جمع‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - A_n)(y_i - y_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - A_n \sum_{i=1}^{n} y_i + nA_n y_k - y_k \sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant 0$$

ازطرف دیگر داریم:

$$nA_n y_k = y_k(x_1 + x_2 + \cdots + x_n),$$

$$y_k \sum_{i=1}^{n} x_i = y_k(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

یعنی $nA_n y_k = y_k \sum_{i=1}^{n} x_i$ و بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - A_n \sum_{i=1}^{n} y_i \geqslant 0$$

که‌باتوجه به‌مقدار A_n به‌دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i$$

روشن است که حالت برابری وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم: $x_i - A_n = 0$ و یا $y_i - y_k = 0$ که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n \quad \text{یا} \quad y_1 = y_2 = \cdots = y_n$$

یادداشت. درفرض نابرابری چه‌بیشف، می‌توان فرض‌کرد:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \quad \text{و} \quad y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$$

که دراین صورت، بازهم نابرابری به‌قوت خود باقی است.

وقتی‌که دودنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ چنان باشندکه به‌شرط $j > i$ داشته باشیم $x_j \geqslant x_i$ و $y_j \geqslant y_i$ یا $x_i \leqslant x_j$ و $y_i \leqslant y_j$، آن وقت، دودنباله را، متشابه‌الترتیب گویند. بنابراین درشرط نابرابریِ چه‌بیشف، تنها باید دودنبالهٔ $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متشابه‌الترتیب باشند. اگر نابرابری چه‌بیشف را، برای دو دنباله‌ای ازعددها بنویسیم‌که متقابل‌الترتیب باشند (یعنی با فرض $j > i$ داشته باشیم $x_j > x_i$ و $y_i < y_j$ یا $x_i < x_j$ و $y_i > y_j$)، آن‌وقت ممکن است به یک نابرابری نادرست برسیم.

مسألهٔ ۱۹. ثابت‌کنید، برای $n \in \mathbf{N}$ داریم:

$$2n(6^n - 1) \geqslant 5(2^n - 1)(3^n - 1)$$

حل. فرض می‌کنیم $x_i = 2^i$ و $y_i = 3^{i-1}$ و این دودنبالهٔ محدود را درنظر می‌گیریم:

$$2,\ 4,\ 8,\ \ldots,\ 2^n$$

$$1,\ 3,\ 9,\ \ldots,\ 3^{n-1}$$

که دودنبالهٔ متشابه‌الترتیب‌اند. بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (*)$$

ازطرف دیگر داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = ۲ + ۱۲ + ۷۲ + \ldots + ۲^n \cdot ۳^{n-1} =$$

$$= \frac{۱}{۳}(۶ + ۶^۲ + \ldots + ۶^n) = \frac{۱}{۳} \cdot \frac{۶(۶^n - ۱)}{۶ - ۱} = \frac{۲}{۵}(۶^n - ۱);$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = ۲ + ۴ + \ldots + ۲^n = \frac{۲(۲^n - ۱)}{۲ - ۱} = ۲(۲^n - ۱);$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = ۱ + ۳ + \ldots + ۳^{n-1} = \frac{۳^n - ۱}{۳ - ۱} = \frac{۱}{۲}(۳^n - ۱);$$

$$\frac{۱}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{۱}{n} \cdot ۲(۲^n - ۱) \cdot \frac{۱}{۲}(۳^n - ۱) = \frac{(۲^n - ۱)(۳^n - ۱)}{n}$$

واگر مقدارهای حاصل را در نابرابری چه بیشف (*) قرار دهیم، به‌نابرابری مطلوب می‌رسیم. علامت برابری، تنها برای $n=۱$ به‌دست می‌آید.

۵. یك نابرابری درمثلث. در مثلث نابرابری‌های زیادی وجود دارد که بعضی از آن‌ها را، ضمن مسأله‌ها و تمرین‌ها آورده‌ایم. ولی یکی از این نابرابری‌ها، تاریخچه جالبی‌دارد و، به‌همین مناسبت، از آن، در این بند، به‌طور مستقل یاد می‌کنیم.

قضیهٔ ۵. ثابت کنید، در هر مثلث، نابرابری زیر برقرار است:

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \geqslant ۴S\sqrt{۳} \qquad (۶)$$

که در آن، a، b و c طول ضلع‌ها و S مساحت مثلث است. علامت برابری برای مثلث متساوی‌الاضلاع پیش می‌آید.

اثبات. مثلث غیرمشخص ABC را، با شرط $|BC| = a$، $|AC| = b$ و $|AB| = c$؛ $\hat{A} = \alpha$، $\hat{B} = \beta$ و $\hat{C} = \gamma$ ومساحت S درنظرمی‌گیریم. خط راست AB، صفحه را به‌دونیم صفحه تقسیم می‌کند. روی ضلع AB ودرنیم صفحه‌ای که شامل رأس C است، مثلث متساوی‌الاضلاع $ABC_۱$ را می‌سازیم. درهرحال خواهیم داشت:

$$|CC_1|^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta - 60^\circ) =$$
$$= a^2 + c^2 - ac(\cos\beta + \sqrt{3}\sin\beta) \;;$$

که اگر از برابری‌های $\cos\beta = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}$ و $\sin\beta = \frac{2S}{ac}$ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$|CC_1|^2 = a^2 + c^2 - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} - 2S\sqrt{3} =$$
$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2S\sqrt{3}$$

که از آن‌جا، با توجه به‌غیرمنفی بودن طول $|CC_1|$ نتیجه می‌شود:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}$$

مسألهٔ ۲۰. ثابت کنید، در هر مثلث با زاویه‌های α، β و γ داریم:

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma \geqslant \sqrt{3}$$

حل. با توجه به‌برابری‌های $bc = \frac{2S}{\sin\alpha}$، $ac = \frac{2S}{\sin\beta}$ و $ab = \frac{2S}{\sin\gamma}$ داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 4S\operatorname{cotg}\alpha,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 4S\operatorname{cotg}\beta \;,\; c^2 = a^2 + b^2 - 4S\operatorname{cotg}\gamma$$

که از مجموع آن‌ها، به‌دست می‌آید:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma)$$

بنابراین، با توجه به‌نابرابری (۶)

$$4S(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma) \geqslant 4S\sqrt{3} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma \geqslant \sqrt{3}$$

علامت برابری برای $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$، یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع.

□

نابرابری (۶) را می‌توان دقیق‌تر کرد. درسال ۱۹۳۸، دوریاضی‌دان، فینسلر و هادویگر ثابت کردند:

$$a^{2}+b^{2}+c^{2}\geqslant 4S\sqrt{3}+Q \qquad (7)$$

که در آن $Q=(a-b)^{2}+(b-c)^{2}+(c-a)^{2}$. این نابرابری را ثابت می‌کنیم.

اثبات نابرابری(۷). مرکز دایره‌های محاطی بیرونی مثلث ABC را I_a، I_b و I_c ومساحت مثلث $I_aI_bI_c$ را S' می‌نامیم (I_a، مرکز دایرهٔ مماس برضلع a (یعنی BC) وامتداد ضلع‌های AB و AC است وغیره).

می‌خواهیم نابرابری (۶) را برای مثلث $I_aI_bI_c$ بنویسیم. برای این منظور، باید مقدارهای S' و $|I_aI_b|^{2}+|I_bI_c|^{2}+|I_cI_a|^{2}$ را پیداکنیم.

اگر ازنقطهٔ I_a، عمود I_aD را برخط راست AB فرودآوریم، روشن است که

$$|AD|=p \quad \text{و} \quad |AI_a|=\frac{p}{\cos\frac{A}{2}}$$

($p=\frac{a+b+c}{2}$، نصف محیط مثلث ABC است). ازطرف دیگر توجه می‌کنیم، دایره‌ای که ازسه رأس مثلث ABC می‌گذرد، همان دایرهٔ ۹ نقطه برای مثلث $I_aI_bI_c$ است، یعنی اگرشعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر R باشد، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $I_aI_bI_c$ برابر $2R$ است. بنابراین، با توجه به‌رابطهٔ سینوس‌ها درمثلث $I_aI_bI_c$ داریم:

$$|I_bI_c|=4R\sin\widehat{I_cI_aI_b}=4R\sin\left(90^{\circ}-\frac{\hat{A}}{2}\right)=4R\cos\frac{A}{2}$$

اگر درمثلث $I_aI_bI_c$، قاعده را I_bI_c بگیریم، پاره خط راست AI_a ارتفاع آن می‌شود، درنتیجه

$$S'=|I_bI_c|\cdot\frac{1}{2}|AI_a|=4R\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{p}{2\cos\frac{A}{2}}=2p\,R=\frac{2SR}{r};$$

از طرف دیگر داریم:

$$r_b+r_c=p\left(tg\ \frac{B}{۲}+tg\ \frac{C}{۲}\right)=\frac{p\sin\frac{B+C}{۲}}{\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}}=\frac{۴\,p\cos^{۲}\frac{A}{۲}}{۴\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}}=$$

$$=\frac{۲(a+b+c)\cos^{۲}\frac{A}{۲}}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{۴R(a+b+c)\cos^{۲}\frac{A}{۲}}{a+b+b}=۴R\cos^{۲}\frac{A}{۲}$$

به‌این ترتیب، با توجه به‌مقداری که برای $|I_bI_c|$ پیدا کرده‌ایم، داریم:

$$|I_bI_c|^{۲}=۱۶R^{۲}\cos^{۲}\frac{A}{۲}=۴R.۴R\cos^{۲}\frac{A}{۲}=۴R(r_b+r_c)$$

که اگر مقدارهای مشابه دوضلع دیگر مثلث $I_aI_bI_c$ را هم درنظر بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$|I_aI_b|^{۲}+|I_bI_c|^{۲}+|I_cI_a|^{۲}=۸R(r_a+r_b+r_c)$$

اکنون می‌توانیم نابرابری (۶) را برای مثلث $I_aI_bI_c$ بنویسیم:

$$|I_aI_b|^{۲}+|I_bI_c|^{۲}+|I_cI_a|^{۲}\geqslant ۴S'\sqrt{۳}$$

از آن‌جا

$$۸R(r_a+r_b+r_c)\geqslant\frac{۸SR\sqrt{۳}}{r}\Longrightarrow ۴r(r_a+r_b+r_c)\geqslant ۴S\sqrt{۳}$$

مقدار سمت چپ نابرابری اخیر را، با توجه به‌دستورهای

$$r=\frac{S}{p}\ ,\ r_a=\frac{S}{p-a}\ ,\ r_b=\frac{S}{p-b}\ ,\ r_c=\frac{S}{p-c}$$

محاسبه می‌کنیم:

$$۴r(r_a+r_b+r_c)=۴\left[\frac{S^{۲}}{p(p-a)}+\frac{S^{۲}}{p(p-b)}+\frac{S^{۲}}{p(p-c)}\right]=$$

$$=۴[(p-b)(p-c)+(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)]=$$

$$=4[p^2-(b+c)p+bc+p^2-(a+c)p+ac+p^2-$$
$$-(a+b)p+ab]=-4p^2+4ab+4bc+4ca=$$
$$=-a^2-b^2-c^2+2ab+2bc+2ca=a^2+b^2+c^2-$$
$$-[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

از آن‌جا، به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4S\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

(علامت برابری، برای $a=b=c$) که همان نابرابری فینسلر- هادویگر است.

۶. محاسبهٔ حداکثر. در یادداشت پایان اثبات اول نابرابری کوشی (§ ۲ از فصل دوم) دیدیم: اگر n عدد مثبت، مجموعی ثابت داشته باشند، حداکثر حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی به‌دست می‌آید که این عددها باهم برابر باشند. خود این مقدار حداکثر را، به‌سادگی می‌توان به‌دست آورد. درواقع، اگر برای مقدارهای مثبت a_1، a_2، ...، a_n داشته باشیم:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=A$$

(A، مقداری است ثابت)، آن وقت، بنابر نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی

$$a_1a_2\cdots a_n\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n=\frac{A^n}{n^n}$$

یعنی حداکثر حاصل‌ضرب، بر $\frac{1}{n^n}A^n$ است.

این قضیه را می‌توان تعمیم داد:

قضیهٔ ۶. اگر برای کمیت‌های مثبت a_1، a_2، ...، a_n داشته باشیم:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=A$$

(A مقداری ثابت است) آن وقت حداکثر مقدار $a_1^\alpha\cdot a_2^\beta\ldots a_n^\gamma$ وقتی به‌دست می‌آید که کمیت‌های a_1، a_2، ...، a_n با توان‌های خود متناسب باشند، یعنی داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{\alpha}=\frac{a_2}{\beta}=\cdots=\frac{a_n}{\gamma}$$

اثبات. مقدارهایی از a_1، a_2، ...، a_n که حاصل‌ضرب $a_1^{\alpha}a_2^{\beta}\dots a_n^{\gamma}$ را به‌حداکثر برسانند، حاصل‌ضرب $\frac{a_1^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\cdot\frac{a_2^{\beta}}{\beta^{\beta}}\dots\frac{a_n^{\gamma}}{\gamma^{\gamma}}$ را هم به‌حداکثر خود می‌رسانند و برای عبارت اخیر، با توجه به نابرابری بین واسطه‌های هندسی و حسابی داریم:

$$\frac{a_1^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\cdot\frac{a_2^{\beta}}{\beta^{\beta}}\dots\frac{a_n^{\gamma}}{\gamma^{\gamma}}=\underbrace{\frac{a_1}{\alpha}\cdot\frac{a_1}{\alpha}\dots\frac{a_1}{\alpha}}_{\alpha\ \text{مرتبه}}\cdot\underbrace{\frac{a_2}{\beta}\cdot\frac{a_2}{\beta}\dots\frac{a_2}{\beta}}_{\beta\ \text{مرتبه}}\dots$$

$$\dots\underbrace{\frac{a_n}{\gamma}\cdot\frac{a_n}{\gamma}\dots\frac{a_n}{\gamma}}_{\gamma\ \text{مرتبه}}\leqslant\left(\frac{\alpha\cdot\frac{a_1}{\alpha}+\beta\cdot\frac{a_2}{\beta}+\dots+\gamma\frac{a_n}{\gamma}}{\alpha+\beta+\dots+\gamma}\right)^{\alpha+\beta+\dots+\gamma}=$$

$$=\left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{\alpha+\beta+\dots+\gamma}\right)^{\alpha+\beta+\dots+\gamma}=\left(\frac{A}{\alpha+\beta+\dots+\gamma}\right)^{\alpha+\beta+\dots+\gamma}=M$$

به‌این ترتیب، حداکثر مقدار $a_1^{\alpha}a_2^{\beta}\dots a_n^{\gamma}$ برابر $M\cdot\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\dots\gamma^{\gamma}$ است و وقتی به‌این حداکثر خود می‌رسد که داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{\alpha}=\frac{a_2}{\beta}=\dots=\frac{a_n}{\gamma}$$

مسألهٔ ۲۱. به‌شرط $-1\leqslant x$، حداکثر مقدار $y=(13-x)^3\sqrt{1+x}$ را پیدا کنید.

حل. داریم $y=(13-x)^3(1+x)^{\frac{1}{2}}$. مجموع پایه‌ها برابر $(13-x)+(1+x)=14$ مقداری است ثابت، بنابراین عبارت y وقتی به‌حداکثر خود می‌رسد که داشته باشیم:

$$\frac{13-x}{3}=\frac{1+x}{\frac{1}{2}}\Longrightarrow x=1\quad\text{و}\quad y_{Max}=12\sqrt[2]{4}$$

مسألهٔ ۲۲. ازصفحه‌ای دایره‌ای‌شکل،قطاعی با زاویهٔ مرکزی α درجه جداکرده و با باقی‌ماندهٔ دایره، مخروطی ساخته‌ایم. α را چند درجه بگیریم تا حجم مخروط حاصل، حداکثرمقدارممکن باشد.

حل. طول کمان قطاع بزرگتر،که مخروط را با آن ساخته‌ایم، x می‌گیریم. این کمان، محیط قاعدهٔ مخروط را تشکیل می‌دهد، بنابراین شعاع قاعدهٔ مخروط، برابر $\frac{x}{۲\pi}$ وارتفاع مخروط، برابر $\sqrt{R^۲-\frac{x^۲}{۴\pi^۲}}$ یا $\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{۴\pi^۲R^۲-x^۲}$ می‌شود (R، شعاع دایرهٔ اصلی و، درضمن، مولد مخروط است). به‌این ترتیب، مقدار V، حجم مخروط، برابر است با

$$V=\frac{۱}{۳}\cdot\frac{x^۲}{۴\pi}\cdot\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{۴\pi^۲R^۲-x^۲}=\frac{۱}{۲۴\pi^۲}\ x^۲(۴\pi^۲R^۲-x^۲)^{\frac{۱}{۲}}$$

واین مقدار، با توجه به‌ثابت بودن مجموع $x^۲$ و $۴\pi^۲R^۲-x^۲$، وقتی به حداکثرخود می‌رسدکه داشته باشیم:

$$\frac{x^۲}{۱}=\frac{۴\pi^۲R^۲-x^۲}{\frac{۱}{۲}} \quad \text{یا} \quad x=۲\pi R\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

به‌این ترتیب، زاویهٔ α باید برابر $۲\pi R\left(۱-\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right)$ رادیان ویا، به تقریب، برابر ۶۶ درجه و ۳۰ دقیقه انتخاب شود.

۷. محاسبهٔ حداقل. اگر $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n کمیت‌هایی مثبت باشند و،در ضمن، حاصل‌ضرب آن‌ها، مقداری ثابت باشد:

$$a_۱a_۲\cdots a_n=P$$

(P مقدارثابتی است)،آن وقت باتوجه به‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی

$$a_۱+a_۲+\cdots+a_n\geqslant n\sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n}=n\sqrt[n]{P}$$

یعنی با شرط ثابت بودن حاصل‌ضرب چند کمیت مثبت، حداقل مجموع آن‌ها برابر $n\sqrt[n]{P}$ است و وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم: $a_1=a_2=\dots=a_n$.

مسألهٔ ۲۳. می‌خواهیم یك لوزی، بر دایره‌ای به شعاع R محیط کنیم. لوزی را چگونه بگیریم تا مساحت آن، حداقل مقدار ممکن باشد؟

حل. اگر قطرهای لوزی محیطی را رسم کنیم، چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ با مساحت‌های برابر به‌دست می‌آید. برای این‌که مساحت لوزی حداقل باشد، باید مساحت یکی از این مثلث‌ها، به‌حداقل خود برسد. وتر این مثلث، ضلع لوزی است که به‌وسیلهٔ نقطهٔ تماس به‌دو پاره خط راست تقسیم شده است. اگر این دو پاره خط راست را به‌طول‌های x_1 و x_2 و زاویه‌ای از لوزی را که مجاور x_1 است با 2α نشان دهیم، داریم:

$$x_1=R\, cotg\alpha \quad , \quad x_2=R\, tg\alpha$$

بنابراین مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ با وتر x_1+x_2 چنین است:

$$S=\frac{1}{2}R^2(tg\alpha+cotg\alpha)$$

حاصل‌ضرب $tg\alpha\, cotg\alpha$، مقداری ثابت و برابر واحد است، بنابراین مجموع آن‌ها وقتی به‌حداقل مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم: $tg\alpha=cotg\alpha$ که، با توجه به‌شرط $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$، به‌دست می‌آید $\alpha=\frac{\pi}{4}$ یا $2\alpha=\frac{\pi}{2}$. یعنی لوزی باید به‌صورت یك مربع درآید.

قضیه‌ای را که در بالا، دربارهٔ حداقل مجموع، آوردیم، می‌توان تعمیم داد.

قضیهٔ ۷. به شرط مثبت بودن کمیت‌های a_1، a_2، ...، a_n و به‌شرطی که حاصل‌ضرب $a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_n^\gamma$ مقداری ثابت باشد، مجموع $a_1+a_2+\dots+a_n$ وقتی به‌حداقل مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{\alpha}=\frac{a_2}{\beta}=\dots=\frac{a_n}{\gamma}$$

اثبات. $a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_n^\gamma$، همزمان با $\left(\frac{a_1}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{a_2}{\beta}\right)^\beta\dots\left(\frac{a_n}{\gamma}\right)^\gamma$، مقداری

ثابت است. ولی حاصل‌ضرب اخیر شامل α عامل $\frac{a_1}{\alpha}$ ، β عامل $\frac{a_2}{\beta}$، ...، γ عامل $\frac{a_n}{\gamma}$ است که مجموع آن‌ها ، چنین است

$$\alpha \cdot \frac{a_1}{\alpha}+\beta \cdot \frac{a_2}{\beta}+\dots+\gamma \cdot \frac{a_n}{\gamma}=a_1+a_2+\dots+a_n$$

یعنی این مجموع، وقتی حداقل می‌شود که آن عامل‌ها باهم برابر باشند:

$$\frac{a_1}{\alpha}=\frac{a_2}{\beta}=\dots=\frac{a_n}{\gamma}$$

مسألهٔ ۲۴. از بین مخروط‌های با حجم ثابت، سطح جانبی کدامیک، کمترین مقدار ممکن است؟

حل. اگر شعاع قاعدهٔ مخروط را x بگیریم، ارتفاع آن برابر $\frac{3V}{\pi x^2}$ می‌شود و برای مولد آن (l) داریم:

$$l^2=x^2+\frac{9V^2}{\pi^2 x^4} \Longrightarrow l=\sqrt{x^2+\frac{9V^2}{\pi^2 x^4}}$$

(V را حجم ثابت مخروط گرفته‌ایم). بنابراین، سطح جانبی مخروط چنین است:

$$S=2\pi x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x^2+\frac{9V^2}{\pi^2 x^4}} \Longrightarrow S^2=\pi^2 x^4+\frac{9V^2}{x^2}$$

چون حاصل‌ضرب $\pi^2 x^4 . \left(\frac{9V^2}{x^2}\right)^2$، مقداری است ثابت، بنابراین S^2 (و در نتیجه، S) وقتی به حداقل مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم:

$$\pi^2 x^4=\frac{9V^2}{2x^2} \Longrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$$

۸. نابرابری ین‌سن. نابرابری ین‌سن، دراساس، برای نابرابری‌های مثلثاتی است. ولی پیش‌از آن‌که به آن بپردازیم، نابرابری‌های ساده‌ای از مثلثات را یادآوری می‌کنیم.

قضیهٔ ۸. درستی نابرابری‌های زیر را ثابت‌کنید:

$$۱)\ \sin\alpha+\sin\beta\leqslant ۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\ ،\ (\circ\leqslant\alpha\ ،\ \beta\leqslant\pi)$$

$$۲)\ \cos\alpha+\cos\beta\leqslant ۲\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\ ،\ \left(-\frac{\pi}{۲}\leqslant\alpha\ ،\ \beta\leqslant\frac{\pi}{۲}\right)$$

$$۳)\ tg\alpha+tg\beta\geqslant ۲tg\frac{\alpha+\beta}{۲}\ ،\ \left(\circ\leqslant\alpha\ ،\ <\frac{\pi}{۲}\right)$$

$$۴)\ cotg\alpha+cotg\beta\geqslant ۲cotg\frac{\alpha+\beta}{۲}\ ،\ \left(\circ<\alpha\ ،\ \beta\leqslant\frac{\pi}{۲}\right)$$

اثبات. ۱) وقتی $\pi\geqslant\alpha\ ،\ \beta\geqslant\circ$، آن وقت $\frac{\pi}{۲}\geqslant\frac{\alpha-\beta}{۲}\geqslant-\frac{\pi}{۲}$ و در نتیجه $\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}\geqslant\circ$. داریم:

$$\sin\alpha+\sin\beta=۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}\leqslant ۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}$$

زیرا $۱\geqslant\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}\geqslant\circ$. روشن است که علامت برابری، برای $\alpha=\beta$ پیش می‌آید.

۲) کافی است درنابرابری $\sin\alpha+\sin\beta\leqslant ۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}$، به جای α و β به‌ترتیب، $\frac{\pi}{۲}-\alpha$ و $\frac{\pi}{۲}-\beta$ قرار دهیم تا به نابرابری $\cos\alpha+\cos\beta\leqslant ۲\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}$ برسیم.

دراین جا باید نابرابری های $\pi\geqslant\frac{\pi}{۲}-\alpha$ و $\frac{\pi}{۲}-\beta\geqslant\circ$ برقرار

باشند که، درنتیجه، به شرط $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha ، \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$ می‌رسیم.

۳) $\alpha > \beta$ و $\lambda = \frac{\alpha+\beta}{2}$ می‌گیریم، یعنی $\beta - \lambda = \lambda - \beta$ و $\alpha - \lambda = \lambda - \beta$

$$\sin\alpha\cos\lambda - \sin\alpha\sin\lambda = \sin\lambda\cos\beta - \cos\lambda\sin\beta \qquad (*)$$

ازشرط $\alpha > \beta$ نتیجه می‌شود $\cos\alpha < \cos\beta$ و

$$\cos\alpha\cos\lambda < \cos\beta\cos\lambda \Longrightarrow \frac{1}{\cos\alpha\cos\lambda} > \frac{1}{\cos\beta\cos\lambda} \qquad (**)$$

ازضرب رابطه‌های (۱) و (۲) دریکدیگر، به‌دست می‌آید:

$$tg\alpha - tg\lambda > tg\lambda - tg\beta \Longrightarrow tg\alpha + tg\beta > 2tg\lambda = 2tg\frac{\alpha+\beta}{2}$$

۴) کافی است درنابرابری $tg\alpha + tg\beta \geqslant 2tg\frac{\alpha+\beta}{2}$، مقدارهای α و β را به‌ترتیب، به $\frac{\pi}{2} - \alpha$ و $\frac{\pi}{2} - \beta$ تبدیل کنیم.

با آزمایش روشن می‌شود که در هر چهار نابرابری قضیهٔ ۸، علامت برابری، برای $\alpha = \beta$ پیش می‌آید.

قضیهٔ ۸ را می‌توان تعمیم داد و ما دربارهٔ سینوس‌ها، به صورت زیر تنظیم می‌کنیم.

قضیهٔ ۹. به‌شرط $0 \leqslant \alpha_1 ، \alpha_2 ، \dots ، \alpha_n \leqslant \pi$ ثابت‌کنید:

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \dots + \sin\alpha_n \leqslant n\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \qquad (8)$$

برابری تنها برای $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$.

اثبات. اثبات را بااستقرای ریاضی وشبیه استدلالی که کوشی برای نابرابری واسطه‌های حسابی وهندسی آورده بود (اثبات سوم، § ۲ ازفصل دوم) می‌آوریم.

نابرابری (۸)، برای $n = 2$ درست است (قضیهٔ ۸)؛ ثابت می‌کنیم ،

برای $n=4$ هم برقرار است. به‌ترتیب داریم:

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4\leqslant 2\left(\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\sin\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 4\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{4}$$

درواقع، به‌این‌مناسبت‌توانستیم‌ازنابرابری قضیهٔ ۸، برای دوزاویهٔ $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ و $\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}$ استفاده‌کنیم‌که شرط $0\leqslant\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, \frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\leqslant\pi$ برقرار است (چرا؟).

باهمین روش می‌توان ثابت‌کرد: اگر نابرابری (۸) برای n برقرار باشد، برای $2n$ هم برقرار است و، درنتیجه، برای $n=2^m$ (یعنی وقتی‌که n برابر توانی از ۲ باشد) برقراراست.

اکنون ثابت می‌کنیم، نابرابری (۸) برای‌هر n درست است. اگر n برابر توانی از ۲ باشد، حکم ثابت است. درحالتی‌که n برابر توانی از ۲ نیست،کوچکترین توان ۲ را که از n بزرگتر باشد 2^m می‌نامیم و فرض می‌کنیم $n+q=2^m$.

n زاویهٔ α_1، α_2، ...، α_n را باشرط $0\leqslant\alpha_i\leqslant\pi$ و q زاویـهٔ برابر α را باشرط $\alpha=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}{n}$ درنظر می‌گیریم؛ درضمن توجه می‌کنیم که

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n+q\alpha}{n+q}=\frac{(n+q)\alpha}{n+q}=\alpha=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}{n}$$

نابرابری (۸) را، برای $n+q=2^m$ زاویهٔ α_1، α_2، ...، α_n، $\underbrace{\alpha\text{، }\alpha\text{، }\dots\text{، }\alpha}_{q\ \text{مرتبه}}$ می‌نویسیم:

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\dots+\sin\alpha_n+q\sin\alpha\leqslant$$

$$\leqslant (n+q)\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+q\alpha}{n+q}=(n+q)\sin\alpha$$

که اگر از دوطرف نابرابری، مقدار $q\sin\alpha$ را حذف کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n\leqslant n\sin\alpha=n\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}$$

درضمن، روشن است که علامت برابری، تنهـا وقتی پیش می‌آید کـه داشته باشیم:

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n$$

ازخواننده می‌خواهیم، با همین روش، سه نابرابری دیگـر قضیهٔ ۸ را تعمیم دهد وثابت کند:

$$\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_n\leqslant$$

$$\leqslant n\cos\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n},\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha_i\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

$$tg\alpha_1+tg\alpha_2+\cdots+tg\alpha_n\geqslant ntg\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n},\ \left(0\leqslant\alpha_i<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$cotg\alpha_1+cotg\alpha_2+\cdots+cotg\alpha_n\geqslant$$

$$\geqslant ncotg\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n},\ \left(0<\alpha_i\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

(درهمهٔ موردها، علامت برابری، تنها بـرای $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n$).

ازاین نابرابری‌ها، به‌سادگی می‌توان نتیجه‌گرفت که درهرمثلث ABC

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant 3\sin\frac{A+B+C}{3}=3\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ودرهرمثلث بازاویه‌های حاده

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2};\ \ tg A+tg B+tg C\geqslant 3\sqrt{3};$$

$$cotg A+cotg B+cotg C\geqslant\sqrt{3}$$

(علامت برابری، درهرچهار حالت، برای مثلث متساوی‌اضلاع).

مسالهٔ ۲۵. اگر a، b، و c، طول ضلع‌های یک مثلث باشند، ثابت کنید:

$$۲abc<(a^۲+b^۲+c^۲)(a+b+c)-۲(a^۳+b^۳+c^۳)\leqslant ۳abc$$

حل. ابتدا چند حکم لازم را ثابت می‌کنیم.

۱) اگر α و β مجموعی برابر یا کوچکتر از $\frac{\pi}{۲}$ داشته باشند، آن‌وقت

$$sin\alpha sin\beta\leqslant\frac{۱}{۲}$$

$sin\alpha$ و $sin\beta$، مقدارهایی مثبت‌اند، بنابراین باتوجه به نابرابری بین واسطه‌های هندسی وتوافقی داریم:

$$\frac{۲}{\frac{۱}{sin\alpha}+\frac{۱}{sin\beta}}\leqslant\frac{۱}{۲}(sin\alpha+sin\beta)\Longrightarrow sin\alpha sin\beta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{۱}{۴}(sin\alpha+sin\beta)^۲=\frac{۱}{۴}\left(۲\,sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\,cos\frac{\alpha-\beta}{۲}\right)^۲=$$

$$=sin^۲\frac{\alpha+\beta}{۲}cos^۲\frac{\alpha-\beta}{۲}\leqslant sin^۲\frac{\alpha+\beta}{۲}\leqslant\frac{۱}{۲}$$

۲) نابرابری $cos A+cos B+cos C\leqslant\frac{۳}{۲}$ درهرمثلثی برقرار است (یعنی لازم نیست، هرسه زاویهٔ مثلث حاده باشند). یکی‌از زاویه‌های مثلث ABC، ومثلاً زاویهٔ C را قائمه یامنفرجه می‌گیریم داریم:

$$cos A+cos B+cos C=cos A+cos B-cos(A+B)=cos A+$$

$$+cos B-cos A cos B+sin A sin B=۱+sin A sin B-$$

$$-(۱-cos A)(۱-cos B)<۱+sin A sin B\leqslant\frac{۳}{۲}$$

(چون $\hat{A}+\hat{B}\leqslant ۹۰^\circ$، پس $sin A\,sin B\leqslant\frac{۱}{۲}$ ؛ بخش ۱) را در حل همین مسأله ببینید). بنابراین، برای درستی نابرابری

$\cos A+\cos B+\cos C \leqslant \frac{3}{2}$ ، شرط حاده بودن همهٔ زاویه‌های مثلث، لازم نیست.

۳) درهر مثلث، مقدار $\cos A+\cos B+\cos C$، می‌تواند به‌دلخواه بسه واحد نزدیك شود، ولی برابر واحد (وبه طور طبیعی، کوچکتر از واحد) نمی‌شود، یعنی درهر مثلث داریم: $\cos A+\cos B+\cos C>1$.

خود نابرابری به سادگی به‌دست می‌آید. درواقع داریم:

$$\cos A+\cos B-(1-\cos C)=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}=$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>0$$

درضمن، اگر فرض کنیم $\hat{C}=90^\circ$، آن وقت $\hat{B}=90^\circ-\hat{A}$ وهرچه زاویهٔ A راکوچکتر بگیریم، مقدار $\cos A+\cos B+\cos C$ به‌واحد نزدیکتر می‌شود، ولی‌چون زاویهٔ A نمی‌تواند برابر صفر باشد، این مجموع هم هرگز برابر واحد نمی‌شود.

اکنون به‌حل مسألهٔ ۲۵ می‌پردازیم. در نابرابری‌های

$$1<\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$$

که درهر مثلث ABC برقرار است، قراردهید (قضیهٔ کسینوس‌ها):

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

با اندکی عمل، نابرابری‌های موردنظر به‌دست می‌آید.

□

حالا دیگر، همه چیز برای بیان واثبات نابرابری ین‌سن آماده‌است.

ابتدا، یک تعریف را ازهندسهٔ تحلیلی به‌یاد می‌آوریم.

تعریف. تابع $f(x)$ را دربازهٔ $[a ، b]$ محدب (یادقیق‌تر، با تحدبی به‌سمت yهای مثبت) گویند، وقتی‌که برای هر دومقدار α و β ازایـن بازه، داشته باشیم

$$f(\alpha)+f(\beta)\leqslant ۲f\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)$$

درحالت عکس، یعنی‌وقتی‌که برای هردومقدار α و β ازبازهٔ $[a ، b]$ داشته باشیم:

$$f(\alpha)+f(\beta)\geqslant ۲f\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)$$

تابع $f(x)$ را در این بازهٔ مقعر (یا باتحدبی به‌سمت yهای منفی) گویند.

درهر دوحالت، برابری برای $\alpha=\beta$.

قضیهٔ ۱۰ (قضیهٔ ین‌سن). اگر $f(x)$ تابعی محدب دربـازهٔ $[a، b]$، و $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، α_n عددهایی حقیقی ازاین بازه باشند، آن وقت

$$f(\alpha_۱)+f(\alpha_۲)+\dots+f(\alpha_n)\leqslant nf\left(\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\dots+\alpha_n}{n}\right)$$

و در حالت مقعر بودن تابع $f(x)$:

$$f(\alpha_۱)+f(\alpha_۲)+\dots+f(\alpha_n)\geqslant nf\left(\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\dots+\alpha_n}{n}\right)$$

درهردوحالت، علامت برابری، برای $\alpha_۱=\alpha_۲=\dots=\alpha_n$.

اثبات این قضیه را می‌توان بااستقرای ریاضی وکاملا شبیه اثبات قضیهٔ ۹ انجام داد.

به‌کمک نابرابری ین‌سن می‌توان نابرابری‌های زیادی‌رابه‌دست‌آورد. به‌این چند مثال توجه‌کنید.

مثال ۱. تابع $y=x^۲$ درتمامی نقطه‌های محورعددی مقعراست، زیرا ازنابرابری $f(a)+f(b)\geqslant ۲f\left(\frac{a+b}{۲}\right)$، به‌دست می‌آید:

$$a^۲+b^۲\geqslant ۲\left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲\Longrightarrow (a-b)^۲\geqslant ۰$$

که درستی آن روشن است و، درضمن، علامت برابری، تنها برای $a=b$ است.

بنابراین، با توجه به نابرابری ین‌سن برای تابع مقعر، نابرابری زیر، برای عددهای حقیقی a_1، a_2، ...، a_n درست است:

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geqslant n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2$$

مثال۲. تابع $y=\sqrt{x}$، برای $x\geqslant 0$ محدب است (چرا؟). بنابراین برای $a_i\geqslant 0$، این نابرابری درست است:

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}\leqslant n\sqrt{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}$$

مثال۳. تابع $y=\log x$، برای $x>0$ محدب است (چرا؟). بنابراین

$$\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_n\leqslant n\log\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right),\ a_i>0$$

که از آن می‌توان نتیجه گرفت

$$a_1a_2\cdots a_n\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n,\ a_i>0$$

واین در واقع، همان نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی n عدد مثبت است.

تمرین

۹۱. اندازه‌های یک استخر روباز باحجم V چقدرباشد تابرای رنگ‌کردن دیواره‌ها وکف آن، حداقل رنگ مصرف شود؟

۹۲. از بین همهٔ مکعب مستطیل‌هایی که قطری به‌طول d دارند، کدامیک سطح جانبی بیشتری دارد؟

۹۳. ذوزنقه‌ای بریک دایره محیط است. ثابت‌کنید طول قطر دایره، ازواسطهٔ هندسی طول‌های دوقاعدهٔ ذوزنقه تجاوزنمی‌کند. باچه شرطی، طول قطر دایره، باواسطهٔ هندسی طول‌های دوقاعدهٔ ذوزنقه برابرمی‌شود؟

۹۴. از بین همهٔ چهاروجهی‌های $ABCD$، با قاعدهٔ مشترک ABC و

ارتفاع مفروض DH، آن‌را پیدا کنید که مساحت کل آن، حداقل مقدار ممکن باشد.

۹۵. از دو نقطهٔ A و B که در دو طرف خط راست d (واقع بر صفحهٔ دو نقطه) قرار دارد، دایره‌ای بگذرانید که از خط راست d، وتری با حداقل طول ممکن جدا کند.

۹۶. مستطیلی با حداکثر مساحت، در یك بیضی مفروض محاط کنید.

۹۷. روی ضلع‌های مستطیلی با محیط ثابت، نیم دایره‌هایی به قطر ضلع‌ها و در بیرون مستطیل رسم کرده‌ایم. حداقل مساحت شکل حاصل، برای کدام مستطیل است؟

۹۸. مثلث ABC مفروض است. از رأس A، خط راست d را چنان بگذرانید که مجموع فاصله‌های از دو رأس B و C تا d، حداقل یا حداکثر مقدار ممکن باشد.

۹۹. زاویهٔ به‌رأس A و اندازهٔ α مفروض است. می‌خواهیم دو نقطهٔ B و C را روی ضلع‌های زاویه طوری انتخاب کنیم که مساحت مثلث ABC برابر مقدار مفروض S و طول ضلع BC، حداقل مقدار ممکن باشد.

۱۰۰. a_1، a_2، ...، a_n را عددهایی می‌گیریم که قدرمطلق هر کدام از آن‌ها، از واحد بزرگتر باشد. ($|a_i|>1$). حداقل مجموع همهٔ حاصل‌ضرب‌های دو به‌دوی این عددها چقدر می‌تواند باشد؟

۱۰۱. α، β و γ زاویه‌های یك مثلث‌اند. حداقل $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}$ چقدر است؟

۱۰۲. α، β و γ زاویه‌های یك مثلث‌اند. ثابت کنید:

$$tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}$$

۱۰۳. می‌دانیم $0^\circ<\alpha, \beta<180^\circ$. حداکثر این عبارت را پیدا کنید:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$$

۱۰۴. A و B بر محیط دایره‌ای مفروض‌اند. نقطهٔ C را روی محیط

دایره چگونه انتخاب کنیم که اولاً مساحت، ثانیاً محیط مثلث ABC حداکثر مقدار ممکن باشد.

۱۰۵. a، b و c عددهایی مثبت‌اند. مطلوب است حداقل تابع

$$y=\sqrt{x^2+a}+\sqrt{(c-x)^2+b}$$

۱۰۶. برای عددهای مثبت m، n، p و q می‌دانیم: $p<q$ و $m<n$.
حداقل مقدار تابع $y_1=\sqrt{x^2-2mx+n^2}+\sqrt{x^2-2px+q^2}$ و
حداکثر مقدار تابع $y_2=\sqrt{x^2+2mx+n^2}-\sqrt{x^2-2px+q^2}$ را
پیدا کنید.

۱۰۷. برای عدد مثبت a، ثابت کنید: $99a+1\geqslant 100\sqrt[100]{a^{99}}$.

۱۰۸. ثابت کنید:

$$1)\quad 2\times 4\times 6\times \dots \times (2n)<(n+1)^n,$$

$$2)\quad 1\times 3\times 5\times \dots \times (2n-1)<n^n$$

فصل چهارم

روش‌ها و کاربردها

§ ۱. روش‌های اثبات نابرابری‌ها

همان طورکه تا این‌جا دیده‌ایم، از همهٔ روش‌ها و ابزارهـای ریاضی می‌توان برای اثبات درستی نابرابری‌ها سود جست. مهم‌ترین ونیرومندترین این‌روش‌ها عبارت‌انداز: روش استقرای‌ریاضی، برهان‌خلف،روش‌مجذورهای کامل، روش هندسی، روش‌های هندسهٔ تحلیلی، مشتق، انتگرال،... درمساله‌ها وتمرین‌های گذشته،کم وبیش، از بیشتراین‌روش‌ها استفاده‌کرده‌ایم. دراین‌جا، تنها به ذکر نمونه‌هایی می‌پردازیم‌که برای اثبـات درستی نابرابری‌ها ، از مشتق یا انتگرال استفاده می‌شود.

□

یکی‌از ساده‌ترین کاربردهای مشتق در اثبات نابرابری‌ها، به ویـژگی تابع‌های صعودی یا نزولی و علامت مشتق آن‌ها مربوط می‌شود. قضیهٔ لاگرانژ می‌گوید: اگر تابع f، در هرنقطهٔ بازهٔ I، مشتقی مثبت (منفی) داشته باشد، آن‌وقت f، دراین بازه صعودی (نزولی) است.

نتیجهٔ روشن این قضیه (که درضمن، تعمیم آن است) چنین‌است:

I. اگر دربازهٔ $(a ، b)$، نابرابری $f'(x)<g'(x)$ برقـرار باشد؛ در ضمن، تابع‌های f و g درنقطهٔ a پیوسته‌باشند وداشته‌باشیم $f(a)\leqslant g(a)$، آن وقت دربازهٔ $(a ، b)$ داریم: $f(x)<g(x)$.

قضیهٔ اخیر را هم می‌توان به‌صورت زیر تعمیم داد:

II. اگر در بازهٔ (a, b) داشته باشیم: $f^{(n)}(x)<g^{(n)}(x)$ و، در ضمن، تابع‌های f و g و مشتق‌های متوالی آن‌ها تا مرتبهٔ $(n-1)$، در نقطهٔ a پیوسته باشند و داشته‌باشیم:

$$f(a)\leqslant g(a),\ f'(a)\leqslant g'(a),\ \dots,\ f^{(n-1)}(a)\leqslant g^{(n-1)}(a)$$

آن‌وقت در بازهٔ (a, b) داریم: $f(x)<g(x)$.

این قضیه، به خصوص، برای اثبات نابرابری‌هایی که، ضمن تبدیل تابع‌هایی مثل $\sin x$، $\cos x$، e^{-x}، $\ln(1+x)$ به‌رشتهٔ توانی، به‌دست می‌آیند، مفید است.

مثال ۱. ثابت کنید، معادلهٔ درجهٔ چهارم

$$2x^4-4x^3+3x^2+4x+1=0$$

برای $x>0$ جواب ندارد.

حل. چندجمله‌ای سمت چپ برابری را $f(x)$ می‌نامیم. داریم:

$$f(x)=2x^4-4x^3+3x^2+4x+1,$$

$$f'(x)=8x^3-12x^2+6x+4,$$

$$f''(x)=24x^2-24x+6=6(2x-1)^2\geqslant 0$$

چون $f''(x)$ غیرمنفی است، بنابراین $f'(x)$ صعودی است؛ درضمن $f'(x)$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است و داریم $f'(0)=4>0$، بنابراین $f'(x)$، به ازای مقدارهای مثبت x، همیشه مثبت است. یعنی $f(x)$، در بازهٔ $[0, \infty)$ صعودی است و چون $f(0)=1>0$، پس $f(x)$، برای همهٔ مقدارهای مثبت x، مثبت است:

$$2x^4-4x^3+3x^2+4x+1>0 \quad (x>0)$$

ومعادلهٔ $f(x)=0$، ریشهٔ مثبت ندارد.

مثال ۲. به شرط $x>0$، درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$x-\frac{x^3}{3}<\operatorname{arctg} x$$

حل. فرض می کنیم $f(x)=x-\frac{x^3}{3}$ و $g(x)=\operatorname{arctg} x$. داریم:

$$f'(x)=1-x^2,\quad g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

برای $x>0$ داریم $1-x^2<\frac{1}{1+x^2}$، زیرا به‌سادگی منجر به نابرابری روشن $x^4>0$ می‌شود. چون $f'(x)<g'(x)$ و چون $f(x)$ و $g(x)$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته‌اند، بنابراین، در بازهٔ $(0, \infty)$ داریم: $f(x)<g(x)$.

□

در § ۲ فصل دوم، هفت روش اثبات، برای درستی نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی آوردیم. اکنون چند اثبات دیگر، که براساس استفاده از ویژگی‌های مشتق قراردارند و، همچنین، اثبات تازه‌ای برای نابرابری ین‌سن، بااستفادهٔ ازمشتق می‌آوریم.

۱. اثبات‌هایی برای درستی نابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی.

اثبات هشتم. قبلا دونکته را یادآوری کنیم. تابع $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$، برای $x>0$ معین است و درنقطهٔ $x=e$ به حداکثر مقدار خود می‌رسد. در واقع داریم:

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln x\,;\ \frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$$

چون $f(x)>0$، پس اگر $f'(x)=0$، آن وقت $\ln x=1$، یعنی $x=e$. در ضمن اگر $x<e$، آن‌وقت $f'(x)>0$ واگر $x>e$، آن وقت $f'(x)<0$.

چون به‌ازای $x=e$، به حداکثر مقدار تابع $f(x)$ می‌رسیم، می‌توان نوشت:

$$f(e)\geqslant f(x)\Longrightarrow e^{\frac{1}{e}}\geqslant x^{\frac{1}{x}}\Longrightarrow e^x\geqslant x^e \qquad (*)$$

n عدد مثبت a_1، a_2، ...، a_n را درنظر می‌گیریم و، طبق معمول، واسطهٔ حسابی آن‌ها را A_n و واسطهٔ هندسی آن‌ها را G_n می‌نامیم. اکنون، در نابرابری (*)، به جای x، به ترتیب $\frac{a_1 e}{G_n}$، $\frac{a_2 e}{G_n}$، ...، $\frac{a_n e}{G_n}$ قرار می‌دهیم. از حاصل‌ضرب نابرابری‌های حاصل، به‌دست می‌آید:

$$e^{\frac{a_1 e}{G_n}+\frac{a_2 e}{G_n}+\dots+\frac{a_n e}{G_n}} \geqslant \left(\frac{a_1 e}{G_n}\cdot\frac{a_2 e}{G_n}\dots\frac{a_n e}{G_n}\right)^e \qquad (**)$$

از آن‌جا که $a_1+a_2+\dots+a_n=nA_n$ و $a_1a_2\dots a_n=G_n^n$، بنابراین، نابرابری (**) به‌این صورت درمی‌آید:

$$e^{\frac{neA_n}{G_n}} \geqslant \left(\frac{e^n G_n^n}{G_n^n}\right)^e = e^{ne}$$

یعنی $\frac{neA_n}{G_n} \geqslant ne$ و از آن‌جا $A_n \geqslant G_n$. علامت برابری تنها وقتی برقرار است که همهٔ مقدارهایی که به‌جای x در (*) گذاشته‌ایم، برابر e باشند، یعنی

$$\frac{a_1 e}{G_n}=\frac{a_2 e}{G_n}=\dots=\frac{a_n e}{G_n}=e \Longrightarrow a_1=a_2=\dots=a_n$$

اثبات نهم. همان‌طور که در اثبات هشتم دیدیم، برای به‌کار گرفتن ویژگی‌های مشتق در اثبات نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی، باید از یک تابع کمکی یاری گرفت. این تابع را درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{1}{n}G_n\left[\left(\frac{a_1}{G_n}\right)^x+\left(\frac{a_2}{G_n}\right)^x+\dots+\left(\frac{a_n}{G_n}\right)^x\right]=$$

$$=\frac{1}{n}G_n\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{G_n}\right)^x$$

روشن است که، دراین صورت داریم:

$$f(1)=\frac{1}{n}G_n\left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{G_n}\right)=$$

$$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A_n;$$

$$f(0)=\frac{1}{n}G_n(1+1+\cdots+1)=G_n$$

به‌این‌ترتیب، باید ثابت کنیم: $f(1)\geqslant f(0)$.

ازتابع $f(x)$، دوبار مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{1}{n}G_n\left[\left(\frac{a_1}{G_n}\right)^x\ln\left(\frac{a_1}{G_n}\right)+\left(\frac{a_2}{G_n}\right)^x\ln\left(\frac{a_2}{G_n}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\left(\frac{a_n}{G_n}\right)^x\ln\left(\frac{a_n}{G_n}\right)\right]=\frac{1}{n}G_n\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{a_i}{G_n}\right)^x\ln\left(\frac{a_i}{G_n}\right)\right];$$

$$f''(x)=\frac{1}{n}G_n\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{a_i}{G_n}\right)^x\cdot\ln^2\left(\frac{a_i}{G_n}\right)\right]$$

بنابراین روشن است که

$$f'(0)=\frac{1}{n}G_n\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{a_i}{G_n}\right)=\frac{1}{n}G_n\ln\frac{a_1a_2\cdots a_n}{G_n^n}=$$

$$=\frac{1}{n}G_n\ln 1=0;\quad f''(x)\geqslant 0$$

چون f'' دربازهٔ $[0,\infty)$ غیرمنفی است، بنابراین f' دراین بازه، صعودی است؛ ولی $f'(0)=0$، یعنی $f'(x)$ در بازهٔ $[0,\infty)$ غیرمنفی است واین، به‌معنای آن است که تابع $f(x)$، دراین بازه صعودی است وباید داشته باشیم: $f(1)\geqslant f(0)$.

۴. اثبات نابرابری ین‌سن به‌کمك مشتق

$f(x)$ را تابعی می‌گیریم که دربازهٔ (a,b) تقعری به‌سمت yهای منفی داشته باشد، یعنی دراین‌بازه داشته باشیم $f''(x)<0$. بنابراین $f(x)$ در بازهٔ (a,b) نزولی است. اکنون، بافرض $a<x_i<b$ و $A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ،

این تابع را درنظر می‌گیریم:

$$g(x)=f(x)-xf'(A)$$

برای مشتق این تابع داریم: $g'(x)=f'(x)-f'(A)$. چون $f'(x)$ نزولی است، $g'(x)$ هم نزولی می‌شود؛ درضمن در نقطهٔ $x=A$ داریم $g'(A)=0$، یعنی $g(x)$ در نقطهٔ $x=A$ به حداکثر مقدار خود، در بازهٔ (a, b)، می‌رسد. به‌این ترتیب

$$f(x)-xf'(A)\leqslant f(A)-Af'(A)$$

اکنون، اگر دراین نابرابری، به‌ترتیب، مقدارهای x_1، x_2، ...، x_n را به‌جای x قرار دهیم $(a<x_i<b)$ ونابرابری‌های حاصل راباهم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)-(x_1+x_2+\dots+x_n)f'(A)\leqslant$$
$$\leqslant nf(A)-nAf'(A)$$

که باتوجه به برابری $x_1+x_2+\dots+x_n=nA$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}\leqslant f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)$$

۳. یاری انتگرال به‌اثبات نابرابری‌ها

استفادهٔ از مفهوم انتگرال در اثبات نابرابری‌ها، براساس قضیهٔ ساده وروشن زیراست.

تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ دربازهٔ $[a, b]$ پیوسته می‌گیریم و فرض می‌کنیم، همه جا، دراین بازه داشته باشیم: $f(x)\leqslant g(x)$. دراین صورت، به شرط $x\in[a, b]$ داریم:

$$\int_a^x f(t)dt\leqslant\int_a^x g(t)dt$$

اگر بدانیم، برای مقداری مثل x_0 از بازهٔ $[a, b]$، نابرابری اکید $f(x_0)<g(x_0)$ برقرار باشد، آن وقت برای $x>x_0$ و $x\in[a, b]$،

خواهیم داشت.

$$\int_a^x f(t)dt<\int_a^x g(t)dt$$

بنا براین، اگر قرار باشد، نابرابری $F(x)\leqslant G(x)$ $(a\leqslant x<b)$ را ثابت کنیم، می‌توان، ابتدا نابرابری متناظر آن را برای $f(x)=F'(x)$ و $g(x)=G'(x)$ ثابت کرد که، دراین صورت، خواهیم داشت:

$$\int_a^x f(t)dt\leqslant\int_a^x g(t)dt$$

سمت چپ وسمت راست نابرابری اخیر یا، به ترتیب، منطبق بر $F(x)$ و $G(x)$ هستند، و یا با آن‌ها در مقدار ثابتی اختلاف دارند. به‌مثال بپردازیم.

مثال. درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

$$1-\frac{x^2}{2!}\leqslant \cos x\leqslant 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

حل. می‌دانیم، برای $0\leqslant x<\infty$ داریم $\sin x\leqslant x$. بنابراین

$$\int_0^x \sin t dt\leqslant\int_0^x t dt$$

که از آن جا به‌دست می‌آید:

$$-\cos t\Big|_0^x\leqslant\frac{1}{2}t^2\Big|_0^x\Longrightarrow -\cos x+1\leqslant\frac{x^2}{2}$$

یعنی $1-\frac{x^2}{2}\leqslant\cos x$. نابرابری سمت چپ ثابت شد.

اگر ازهمین نابرابری، که ثابت کردیم، استفاده کنیم، باید داشته باشیم:

$$\int_0^x \cos t dt\geqslant\int_0^x\left(1-\frac{t^2}{2}\right)dt$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود: $\sin x\geqslant x-\frac{x^3}{3!}$ (که خود، یك نابرابری جالب

است). با توجه به نابرابری اخیر، داریم:

$$\int_0^x \sin t\,dt \geqslant \int_0^x \left(t-\frac{t^3}{3!}\right) dt \Longrightarrow \cos x \leqslant 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

§۲. کاربردها

نیازی به بحث طولانی در بارهٔ کاربرد نابرابری‌ها نیست. ضمن مساله‌ها، مثال‌ها، و تمرین‌ها دیدیم که، به کمك نابرابری‌ها، می‌توان کمیت‌ها را ارزیابی کرد، حداکثر یا حداقل تابع‌ها را به‌دست آورد، ضریب‌های معادله را به‌دست آورد، وجود یا عدم وجود ریشه را برای معادله‌ها پیش بینی کرد، در حل مساله‌های هندسی تواناتر بود،...

مثال ۱. ثابت کنید: $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

حل. به کمك این نابرابری، می‌توان مقدار بعضی لگاریتم‌ها را ارزیابی کرد. مثلاً، برای $\ln 1/01$ به‌دست می‌آید: $\frac{1}{101}<\ln 1/01<\frac{1}{100}$.

برای اثبات، از نابرابری

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

(فصل اول را ببینید) استفاده می‌کنیم. از این نابرابری، با لگاریتم گرفتن به‌دست می‌آید:

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

که از نابرابری سمت چپ آن به دست می‌آید $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ و از نابرابری سمت راست آن $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$، یعنی

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

مثال۲. دنبالهٔ $\{a_n\}$ را با این تعریف در نظر می‌گیریم:

$$a_1=1+\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\ a_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6},$$

$$a_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8},\ \dots,\ a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}$$

مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

حل. از نابرابری سمت راست مثال قبلی، به‌دست می‌آید:

$$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$$

و از نابرابری سمت چپ آن، با تبدیل n به $n-1$:

$$\frac{1}{n}<\ln\frac{n}{n-1}$$

به‌این ترتیب: $\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}<\ln\frac{n}{n-1}$.

اگر در این نابرابری‌ها، n را به ترتیب به $n+1$، $n+2$، ...، $2n$ تبدیل کنیم، این نابرابری‌ها به‌دست می‌آید:

$$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}<\ln\frac{n}{n-1}$$

$$\ln\frac{n+2}{n+1}<\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}$$

$$\ln\frac{n+3}{n+2}<\frac{1}{n+2}<\ln\frac{n+2}{n+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\ln\frac{2n+1}{2n}<\frac{1}{2n}<\ln\frac{2n}{2n-1}$$

ازمجموع این نابرابری‌ها، باتوجه به ویژگی مجموع لگاریتم‌ها (مجموع لگاریتم‌های چند عدد برابر است با لگاریتم حاصل‌ضرب آن‌ها)، پس از ساده کردن، به‌دست می‌آید:

$$\ln\frac{2n+1}{n}<a_n<\ln\frac{2n}{n-1}$$

ازطرف دیگر داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2 \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n-1}=2$$

درنتیجه، روشن است که $\lim_{n\to\infty} a_n=\ln 2$ یا

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$$

مثال ۳. این مجموع را محاسبه کنید (مجموع جمله‌های یک رشتهٔ نامتناهی):

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\dots$$

حل. مجموع‌های جزئی این رشته را درنظر می‌گیریم:

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=1-\frac{1}{2} \ , \ x_3=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \ ,\dots$$

$$\dots, \quad x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

به‌این ترتیب: $\lim_{n\to\infty} x_n=S$. به‌ترتیب داریم:

$$x_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n}\right)-$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$$

بنابراین، $x_{2n}=a_{2n}-\frac{1}{n}$ که، در آن

$$a_{2n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$$

که با توجه به مثال ۲، به‌دست می‌آید $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\ln 2$. به‌همین ترتیب

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(x_{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)=\ln 2$$

بنابراین $S=\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\ln 2$.

مجموع S، یك رشتهٔ متقارب را تشکیل می‌دهد، زیرا حد آن برابر مقدار معین $\ln 2$ است.

یادداشت. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که رشتهٔ توافقی، یعنی

$$\sum_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

متباعد است، یعنی وقتی $n\to\infty$، به‌سمت حد معینی میل نمی‌کند. درواقع، اگر درنابرابری

$$\frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n}$$

(مثال ۲ را ببینید)، به‌ترتیب عددهای ۱، ۲، ...، n را به‌جای n قراردهیم و نابرابری‌های حاصل را باهم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sum_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$$

ودرنتیجه $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_n>\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$.

تمرین

درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

۱۰۹. $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{x-a}$ $(x>a>0)$.

۱۱۰. $(1+x)^{\alpha}+(1-x)^{\alpha}\geqslant 2$ ($|x|<1$ و $0\leqslant\alpha\leqslant 1$).

۱۱۱. $\frac{a^n+b^n}{2}<\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$ ($a>b>0$ و $a\neq b$).

۱۱۲. $\ln(1+x)<x$ $(x>0)$.

۱۱۳. $e^{2x}<\frac{1+x}{1-x}$ $(0<x<1)$.

۱۱۴. $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$ $(x>0)$.

۱۱۵. $e^{-x}>1-x$ $(x<0)$.

۱۱۶. $x+\frac{x^3}{3}<tg x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

۱۱۷. $x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$ $(x>0)$.

۱۱۸. $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ $(x>0)$.

۱۱۹. ثابت کنید: $\int_0^1\frac{\mathrm{arc}tg x}{\sin x}dx>\frac{8}{9}$.

۱۲۰. ثابت کنید، به‌شرط $\alpha>1$، این رشته متقارب است

$$1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\dots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\dots$$

۱۲۱. برای $x\geqslant 0$ ثابت کنید: $\ln(1+x)\geqslant\frac{2x}{x+2}$.

۱۲۲. برای $x \geqslant 0$ ثابت کنید: $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

۱۲۳. برای $n \in \mathbf{Z}$، مطلوب است n، به‌شرطی‌که داشته باشیم:

$$2n + 3 < \ln(n^3 + 9)$$

۱۲۴. آیا برای x در بازهٔ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ می‌توان مقداری پیدا کرد که در نابرابری زیر صدق کند:

$$3x - tg\, x > \frac{7}{4}$$

۱۲۵. کدام بزرگترند:

۱) $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$ یا $2\sqrt[3]{3}$؛

۲) $\log_4 5$ یا $\log_5 6$؛

۳) 1000^{1001} یا 1001^{1000}؛

۴) $\cos 1370$ یا $1 + \cos 1371$؛

۵) $4 tg 5^\circ tg 9^\circ$ یا $3 tg 6^\circ tg 10^\circ$؛

۶) $\sin^3 1^\circ + \sin^3 4^\circ$ یا $\sin^3 2^\circ + \sin^3 3^\circ$؟؛

۷) محیط مثلث یا مجموع میانه‌های آن؛

۸) $7^7 \sin^4\alpha \cos^{10}\alpha$ یا 12500 $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$؛

۹) 21^{23} یا 23^{21} ۱۰) 555^{553} یا 553^{555}؛

۱۱) $e^e \pi^\pi$ یا $e^{2\pi}$؛

۱۲) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x(\sqrt{x}-1)}$ یا $\sqrt{x}$؛

۱۳) $\frac{tg\, x}{x}$ یا $\frac{x}{\sin x}$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$؛

۱۴) $tg11^\circ$ یا $\frac{۱}{۵}$

۱۵) $\int_{-۲}^{۳} \operatorname{arc} tg x dx$ یا $\int_{-۳}^{۲} \operatorname{arc} tg x dx$

۱۲۶. به‌شرط $\frac{\pi}{۲} \geqslant x \geqslant ۰$ ثابت کنید:

$$x - \sin x \leqslant ۱ - \cos x \leqslant x\sqrt{۲} - \sin x$$

۱۲۷. به‌شرط $\frac{\pi}{۲} > x > \frac{\pi}{۶}$، ثابت کنید:

$$\ln(۲\sin x) > \frac{۱}{۲}x(\pi - x) - \frac{۵}{۷۲}\pi^۲$$

۱۲۸. به‌شرط $۰ \leqslant x$، ثابت کنید:

$$x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \dots + \frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱} - \frac{x^{۲n+۲}}{۲n+۲} \leqslant \ln(۱+x) \leqslant$$
$$\leqslant x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \dots + \frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱}$$

۱۲۹. به‌شرط $\frac{\pi}{۲} > x \geqslant ۰$، ثابت کنید:

$$\ln \cos x \leqslant -\frac{۱}{۲}x^۲$$

۱۳۰. به‌شرط $\frac{\pi}{۲} \geqslant x \geqslant ۰$، ثابت کنید:

$$\sin x \leqslant \frac{۱}{۲}x(\pi - x)$$

۱۳۱. به‌شرط $\frac{\pi}{۲} > x \geqslant ۰$، ثابت کنید:

$$\cos x + \ln \cos x \leqslant ۱ - x^۲$$

۱۳۲. می‌دانیم $a<\sqrt{N}<a+1$. ثابت کنید:

$$\frac{a(a^2+3N)}{3a^2+N}<\sqrt{N}<\frac{(a+1)[(a+1)^2+3N]}{3(a+1)^2+N}$$

۱۳۳. می‌دانیم $a<\sqrt[3]{N}<a+1$. ثابت کنید:

$$\frac{a(a^3+2N)}{2a^3+N}<\sqrt[3]{N}<\frac{(a+1)[(a+1)^3+2N]}{2(a+1)^3+N}$$

۱۳۴. می‌دانیم دو ریشه از معادلهٔ با ضریب‌های درست

$$A_n x^n+A_{n-1}x^{n-1}+\dots+A_1 x+A_0=0$$

$x_1=1$ و $x_2=2$ است. ثابت کنید، دست کم یکی از ضریب‌های A_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) از -2 تجاوز نمی‌کند.

۱۳۵. به‌شرط $x\geqslant 0$، ثابت کنید:

$$\frac{2x}{x+2}\leqslant \ln(x+1)\leqslant \frac{2(x+1)}{x+3}$$

۱۳۶. عددی طبیعی، دارای دومقسوم‌علیه اول است؛ درضمن با نصف مجموع همهٔ مقسوم‌علیه‌های خود، برابرشده است. همهٔ این‌گونه عددها را پیدا کنید.

۱۳۷. ثابت کنید، برای عدد طبیعی $n\geqslant 2$، داریم:

$$\frac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\frac{3^3+1}{3^3-1}\ \cdots\ \frac{n^3+1}{n^3-1}<\frac{3}{2}$$

۱۳۸. می‌دانیم a_0، a_1، ...، a_{2n}، a_{2n+1} عددهایی مثبت‌اند و، در ضمن، به‌همین ردیف، تشکیل یك تصاعد حسابی صعودی می‌دهند. ثابت کنید:

$$\frac{n}{a_1 a_{2n+1}}<\frac{1}{a_1 a_2}+\frac{1}{a_3 a_4}+\dots+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}<\frac{n}{a_0 a_{2n}}$$

۱۳۹. حداقل حجم مخروطی را پیدا کنید که بر کرهٔ مفروضی محیط شده است.

۱۴۰. درهرم $SABC$ می‌دانیم: $|AB|=|AC|=|SB|=|SC|$ و $|BC|=|SA|$. مساحت مثلث ABC، برابر است با ۱. زاویهٔ $\widehat{BAC}$ چقدر باشد تا حجم هرم، به‌حداکثر مقدار خود برسد؟

۱۴۱. درهرم منتظمی با قاعدهٔ مثلثی، هر یال جانبی برابر ۱، وزاویهٔ دو وجهی مجاور قاعده، برابر α است. به‌ازای چه مقداری از α، حجم هرم به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد؟

۱۴۲. درهرم $SABCD$، یال SD برقاعدهٔ $ABCD$ عمود است، می‌دانیم $ABCD$ یك مستطیل است و $|BC|=|SC|=۱$ و $\widehat{SBA}=\alpha$. حداکثر حجم هرم به‌ازای چه مقداری از α به‌دست می‌آید؟

۱۴۳. درچهار وجهی $SABC$ می‌دانیم: $|AB|=|BC|$، $\widehat{ABC}=۲\alpha$. هر یال جانبی هرم، با صفحهٔ قاعده، زاویه‌ای برابر α می‌سازد وطولی برابر ۱ دارد. به‌ازای چه مقداری از α، حداکثر حجم برای چهار-وجهی به‌دست می‌آید؟

۱۴۴. درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{C}=۹۰^\circ)$ می‌دانیم $\hat{A}=۶۰^\circ$. مثلث متساوی‌الاضلاعی دراین‌مثلث محاط کنیدکه طول ضلع آن، حداقل‌مقدار ممکن باشد (رأس‌های مثلث‌محاطی، روی‌ضلع‌های‌مختلف مثلث ABC است).

۱۴۵. می‌دانیم $\log_{\frac{۱}{۲}} a \cdot \log_{\frac{۱}{۲}} b=۱$ و $۰<a، b<۱$. حداقل و حداکثرمقدار ab چقدرمی‌تواند باشد؟

۱۴۶. می‌دانیم $x+y+z=۲$ و $xy+xz+yz=۱$. ثابت کنید، هریك ازعددهای x، y و z به‌بازهٔ $\left[۰، \frac{۴}{۳}\right]$ تعلق دارند.

۱۴۷. مطلوب است حداقل تابع $y=\dfrac{a-b\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ($a>b>۰$ و $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$).

۱۴۸. مطلوب است حداکثر تابع $y=a\sqrt{\sin\alpha}+b\sqrt{\cos\alpha}$ ($a، b>۰$ ؛ $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$).

۱۴۹. مطلوب است حداقل مقدار تابع $f(x,y)=\frac{y}{x}$ در مجموعهٔ نقطه‌های (x,y)، که در معادلهٔ $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=1$ صدق کنند.

۱۵۰. با شرط $x^4+y^4=1$، به ازای چه عددهای x و y، مقدار x^9+y^9 به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد؟

۱۵۱. مطلوب است حداقل مقدار تابع $y=ax^m+\frac{b}{x^n}$، برای عددهای مثبت x ($a,b>0$؛ m و n عددهایی طبیعی).

۱۵۲. می‌دانیم $\sum_{i=1}^{n} a_i=1$ ، $\sum_{i=1}^{n} b_i=1$ و $a_i>0$ ، $b_i>0$ ($i=1, 2, \ldots, n$). ثابت کنید $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i}\geqslant 1$

۱۵۳. مسیرهای AB و CB در نقطهٔ B به‌هم رسیده‌اند و باهم زاویه‌ای برابر β ساخته‌اند؛ درضمن $|AB|=a$. متحرکی از A به‌طرف B با سرعت v_1، و همزمان با او، متحرك دیگری از B به طرف C با سرعت v_2 به‌راه افتادند. بعدازچه مدت، فاصلهٔ بین آن‌ها، به‌حداقل مقدار خود می‌رسد؟

۱۵۴. مقطع عرضی یك کانال آب، به‌شکل ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی است که مساحتی برابر S و زاویهٔ مجاور قاعدهٔ بزرگتر برابر α دارد. عمق کانال چقدر باشد تا مقاومت اصطکاك جدار کانال درمقابل آب، حداقل مقدار ممکن باشد؟

۱۵۵. n عددی طبیعی است؛ مطلوب است حداقل مقدار تابع

$$f(x)=\left(\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)^n+\left(\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)^n$$

۱۵۶. می‌دانیم: $a_1<a_2<\cdots<a_k<a_{k+1}<\cdots<a_n$. ثابت کنید:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}<\frac{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n}{n-k}$$

۱۵۷. می‌دانیم $x+y+z=a$ و $xy+xz+yz=b$. ثابت کنید:

$$\max(x, y, z)-\min(x, y, z)\leqslant\frac{۴}{۳}\sqrt{a^۲-۳b}$$

۱۵۸. ثابت کنید، برای $۰<\alpha\leqslant\frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$\frac{۲}{\alpha}(۱-\cos\alpha)<(۲-\sqrt{۲})\sin\frac{\alpha}{۲}+\sin\alpha$$

۱۵۹. ثابت کنید: $\frac{\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta}{\sin^۲\alpha+\sin^۲\beta}\leqslant\frac{۱}{۲}(\cot g^۲\alpha+\cot g^۲\beta)$.

۱۶۰. مطلوب است، حداقل مقدار تابع

$$y=(x-۱)(x-۲)(x-۵)(x-۶)+۹$$

۱۶۱. با فرض $۰<x<\frac{\pi}{۲}$، ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y=\frac{tg۳x}{tg^۳x}$ را پیدا کنید.

۱۶۲. α، β و γ زاویه‌های یك مثلث وزاویه‌هایی حاده‌اند. ثابت کنید:

$$۱)\ \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqslant\frac{۱}{۸};\quad ۲)\ \frac{۱}{\cos\alpha}+\frac{۱}{\cos\beta}+\frac{۱}{\cos\gamma}\geqslant۶;$$

$$۳)\ tg^۲\alpha+tg^۲\beta+tg^۲\gamma\geqslant۹$$

۱۶۳. روی صفحهٔ مختصاتی، نقطه‌های با مختصات درست را علامت گذاشته‌ایم. مربعی‌که شامل هیچ‌کدام از این نقطه‌ها نباشد، حداکثر چه مساحتی دارد؟

۱۶۴. باروش استقرای ریاضی ثابت کنید ($n\in\mathbf{N}$):

۱) $۲^n>n^۲$ $(n\geqslant۵)$؛ ۲) $۲^n>n^۳$ $(n\geqslant۱۰)$؛

۳) $\frac{۱}{\sqrt{۱}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ $(n>۱)$؛

۱۶۵. قطاعی ازدایرهٔ به‌شعاع R مفروض است. اگرزاویهٔ مرکزی این

قطاع برابر α باشد، مستطیلی در آن محاط کنید که حداکثر مساحت را داشته باشد.

۱۶۶. a، b و c طول ضلع های یك مثلث غیرمشخص‌اند. ثابت کنید:

$$a^{2}b(a-b)+b^{2}c(b-c)+c^{2}a(c-a)\geqslant 0$$

علامت برابری مربوط به‌چه مثلثی است؟

۱۶۷. یك چهارضلعی درعین حال می‌تواند دریك دایـره محاط بـر دایرهٔ دیگری محیط شود. اگر p نصف محیط و S مساحت آن باشد، ثـابت کنید $p^{2}\geqslant 4S$.

۱۶۸. α، β و γ زاویه های یك مثلث‌اند. ثابت کنید:

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{2}\leqslant \cos^{2}\frac{\alpha}{2}+\cos^{2}\frac{\beta}{2}+\cos^{2}\frac{\gamma}{2}$$

۱۶۹. باشرط $0<x<\frac{\pi}{2}$، ثابت کنید: $2^{\sin x}+2^{tg x}\geqslant 2^{x+1}$.

۱۷۰. باشرط $1<a<b$ و $h>0$ ثابت کنید:

$$\log_{a}b>\log_{a+k}(b+k)$$

۱۷۱. نقطهٔ C روی پاره‌خط راست AB داده شده‌است. نیم‌دایره‌هایی دریك‌طرف خط‌راست AB و، به‌ترتیب، به‌قطرهای $|AB|$، $|AC|$ و $|CB|$ رسم کرده‌ایم. اگرشعاع دایره‌ای راکه براین سه نیم دایـره مماس است، R بگیریم، ثابت کنید: $R\leqslant\frac{1}{6}|AB|$.

۱۷۲. شرط لازم و کافی، برای این‌که هرسه زاویهٔ مثلث ABC حـاده باشند، این است که داشته باشیم: $tg\hat{A}tg\hat{B}>1$.

۱۷۳. n عددی است طبیعی. ثابت کنید:

$$\sqrt[n]{n}+\sqrt[n+1]{n}+\dots+\sqrt[2n-1]{n}\geqslant\sqrt[n]{n^{2}}$$

۱۷۴. برای متغیرهای x، y، z و t می‌دانیم:

$$1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant t \leqslant 100$$

حداقل مقدار $\frac{x}{y}+\frac{z}{t}$ چقدر است؟

۱۷۵. x، y و z عددهایی دلخواه و مثبت، و α، β، γ زاویه‌های یک مثلث‌اند. ثابت کنید:

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant 2yz\cos\alpha+2zx\cos\beta+2yx\cos\gamma$$

۱۷۶. چهاروجهی $ABCD$ در کره‌ای به‌مرکز O وشعاع برابر R محاط شده‌است. خطهای راست AO، BO، CO و DO را رسم کرده‌ایم تا وجه‌های متناظر را در نقطه‌های A_1، B_1، C_1 و D_1 قطع کنند، ثابت کنید:

$$|AA_1|+|BB_1|+|CC_1|+|DD_1| \geqslant \frac{16}{3}R$$

۱۷۷. تابع $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\dots+a_n\sin nx$ داده شده‌است و می‌دانیم، $a_i \in \mathbf{R}$ $(i=1, 2, \dots, n)$، $n \in \mathbf{N}$ و $|f(x)| \leqslant |\sin x|$ (برای هر $x \in \mathbf{R}$). ثابت کنید: $|a_1+2a_2+\dots+na_n| \leqslant 1$.

۱۷۸. a_1، a_2، ...، a_n عددهایی مثبت و b_1، b_2، ...، b_n ترتیب دلخواهی ازهمان عددهاست. ثابت کنید:

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\dots+\frac{a_n}{b_n} \geqslant n$$

۱۷۹. ازیك صفحهٔ کاغذ مربعی شکل به‌ضلع برابر a، گستردهٔ هرم منتظمی باقاعدهٔ مربعی را بریده‌ایم، به‌نحوی‌که باروی هم قراردادن رأس‌های مربع اصلی، رأس هرم به‌دست آید. ضلع قاعدهٔ هرم را چقدر انتخاب کنیم تاحجم آن حداکثر مقدارممکن باشد؟

۱۸۰. a، b، c، d و e، عددهایی حقیقی ودلخواهند. ثابت کنید.

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geqslant a(b+c+d+e)$$

۱۸۱. برای عددهای غیرمنفی x، y، z و t می‌دانیم $x+z=1$ و $y+t=1$. اگر a و b، عددهای مثبت ثابتی باشند، حداقل وحداکثر مقدار

این تابع را پیدا کنید:

$$f(x, y, z, t)=\frac{ax^2+by^2}{ax+by}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}$$

۱۸۲. معادلهٔ $x^{37}+x^8+1=0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱۸۳. به ازای چه مقدارهایی از عددهای طبیعی a و b، عدد a^2+7b^2+811 بر عدد $4ab+22a+47b$ بخش‌پذیر است؟

۱۸۴. دو وتر AB و CD را، به‌ترتیب، به‌طول‌های $2a$ و $2b$ و موازی با یکدیگر، در دایره‌ای رسم کرده‌ایم. فاصلهٔ بین این دو وتر برابر است با d. مطلوب است شرط لازم و کافی، برای این‌که مرکز دایره: ۱) در درون ذوزنقهٔ $ABCD$؛ ۲) در بیرون آن باشد.

۱۸۵. a و b عددهایی طبیعی‌اند. ثابت کنید:

$$2\sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}}\leqslant a^2+b^2$$

۱۸۶. در مثلث ABC داریم: $a=|BC|$، $b=|CA|$، $c=|AB|$. M نقطه‌ای دلخواه از فضاست و فرض می‌کنیم: $a_1=|MA|$، $b_1=|MB|$، $c_1=|MC|$. ثابت کنید:

$$a\cdot a_1^2+b\cdot b_1^2+c\cdot c_1^2\geqslant abc$$

۱۸۷. R و r را، به‌ترتیب، شعاع کرهٔ محیطی و شعاع کرهٔ محاطی هرم منتظمی با قاعدهٔ مثلثی می‌گیریم. ثابت کنید $R\geqslant 3r$.

۱۸۸. برای $n\in\mathbf{N}$ ثابت کنید:

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n}\right)$$

۱۸۹. با چه شرطی، نابرابری $a^4+b^4\geqslant 2ab^3$ برقرار است؟

۱۹۰. برای $n\in\mathbf{N}$ و $n\geqslant 2$ ثابت کنید:

$$\log_{n!}^2 n+\log_{n!}^2(n-1)+\log_{n!}^2(n-2)!>\frac{1}{3}$$

۱۹۱. درستی نابرابری‌های ابوالوفا را ثابت کنید:

$$\frac{۲}{۳}sin\left(\frac{۱۵}{۳۲}\right)^{\circ}+\frac{۱}{۳}sin\left(\frac{۱۸}{۳۲}\right)^{\circ}<sin\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\circ}<\frac{۴}{۳}sin\left(\frac{۱۵}{۳۲}\right)^{\circ}-\frac{۱}{۳}sin\left(\frac{۱۲}{۳۲}\right)^{\circ}$$

۱۹۲. به‌ازای چه مقدارهایی از $a\in\mathbf{R}$، این معادله جواب دارد:

$$\sqrt{x+۲}+\sqrt{۸-۲x}=a$$

۱۹۳. با بررسی تابع $f(x)=\sqrt{۳x-۲}-\sqrt{۲x-۱}$، ثابت کنید، معادلهٔ $f(x)=۴$، تنها یك جواب دارد.

۱۹۴. این معادله را حل کنید: $|۶x-۵|=۴sin\frac{\pi}{۳}x$.

۱۹۵. به‌ازای چه مقدارهایی از $a\in\mathbf{R}$، این نامعادله جواب دارد:

$$\sqrt{۲x-۱}\geqslant x+a$$

۱۹۶. D، E و F را پای نیمسازهای داخلی مثلث ABC می‌گیریم. ثابت کنید: $S_{DEF}\leqslant\frac{۱}{۴}S_{ABC}$.

حل تمرین‌ها

۱) به‌ترتیب داریم:

$$۳۱^{۱۱} < ۳۲^{۱۱} = ۲^{۵۵} < ۲^{۵۶} = ۱۶^{۱۴} < ۱۷^{۱۴}$$

پاسخ $۱۷^{۱۴}$ از $۳۱^{۱۱}$ بزرگتر است.

۲) $A = ۲\sqrt{۵۰۰}$ و $B = \sqrt{۵۰۱} + \sqrt{۴۹۹}$ می‌گیریم. به ترتیب داریم:

$$\begin{cases} A^۲ = ۲۰۰۰ \\ B^۲ = ۱۰۰۰ + ۲\sqrt{۵۰۱ \times ۴۹۹} \end{cases} ; \begin{cases} \dfrac{A^۲ - ۱۰۰۰}{۲} = ۵۰۰ \\ \dfrac{B^۲ - ۱۰۰۰}{۲} = \sqrt{۵۰۱ \times ۴۹۹} \end{cases} ;$$

$$\left(\frac{A^۲ - ۱۰۰۰}{۲}\right)^۲ = ۲۵۰۰۰۰$$

$$\left(\frac{B^۲ - ۱۰۰۰}{۲}\right)^۲ = ۲۴۹۹۹۹$$

پاسخ. $۲\sqrt{۵۰۰}$ از $\sqrt{۵۰۱} + \sqrt{۴۹۹}$ بزرگتر است.

۳) اگر صورت و مخرج کسر $\dfrac{۱۰^{۱۳۶۹} + ۱}{۱۰^{۱۳۷۰} + ۱}$ را در $۱۰^{۱۳۷۱} + ۱$ ضرب کنیم، درستی ردیف عمل‌های زیر، به‌سادگی روشن می‌شود:

$$\frac{۱۰^{۱۳۶۹} + ۱}{۱۰^{۱۳۷۰} + ۱} = \frac{۱۰^{۱۳۶۹+۱۳۷۱} + ۱۰^{۱۳۷۱} + ۱۰^{۱۳۶۹} + ۱}{(۱۰^{۱۳۷۰} + ۱)(۱۰^{۱۳۷۱} + ۱)} =$$

$$=\frac{10^{2\times 1370}+10^{1370}\left(10+\frac{1}{10}\right)+1}{(10^{1370}+1)(10^{1371}+1)}>$$

$$>\frac{10^{2\times 1370}+2\times 10^{1370}+1}{(10^{1370}+1)(10^{1371}+1)}=\frac{(10^{1370}+1)^{2}}{(10^{1370}+1)(10^{1371}+1)}=$$

$$=\frac{10^{1370}+1}{10^{1371}+1}$$

پاسخ. کسر $\frac{10^{1369}+1}{10^{370}+1}$ بزرگتر است.

۴) در این جا نمی‌توانیم از روشی که برای حل تمرین (۲،۱) آوردیم، استفاده کنیم (آزمایش کنید!) مساله را در حالت کلی حل می‌کنیم:

اگر $k>1$ و $n\in\mathbf{N}$، ثابت کنید $2\sqrt[n]{k}>\sqrt[n]{k+1}+\sqrt[n]{k-1}$.

دوراه حل برای این مسأله می‌آوریم:

راه حل اول. نابرابری را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\sqrt[n]{k}-\sqrt[n]{k-1}>\sqrt[n]{k+1}-\sqrt[n]{k} \qquad (1)$$

درهرطرف نابرابری، عبارتی به‌صورت $a-b$ وجود دارد؛ آن‌ها را به‌عنوان کسری بامخرج واحد درنظر می‌گیریم و درهرطرف، صورت ومخرج را در $a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1}$ ضرب می‌کنیم، نابرابری (۱) به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{k^{n-1}}+\sqrt[n]{k^{n-2}(k-1)}+\dots+\sqrt[n]{(k-1)^{n-1}}}>$$

$$>\frac{1}{\sqrt[n]{(k+1)^{n-1}}+\sqrt[n]{(k+1)^{n-2}\cdot k}+\dots+\sqrt[n]{k^{n-1}}}$$

در مخرج هریك ازکسرها n جمله وجود دارد و، به سادگی دیده می‌شود که، هر جمله‌ازمخرج کسر سمت چپ، از جملهٔ نظیرخود درمخرج کسر سمت راست،

کوچکتراست؛ درضمن، از بین دو کسر، آن که مخرج کوچکتری دارد، بزرگتر است. درستی نابرابری (۱) و، درنتیجه، درستی نابرابری موردنظر ثابت شد. مثلاً، نابرابری تمرین ۴۰۱)، منجر به نابرابری روشن زیرمی‌شود:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵۰۰^۲}+\sqrt[۳]{۵۰۰\times۴۹۹}+\sqrt[۳]{۴۹۹^۲}}>$$

$$>\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵۰۱^۲}+\sqrt[۳]{۵۰۱\times۵۰۰}+\sqrt[۳]{۵۰۰^۲}}$$

راه حل دوم. تابع $f(x)=\sqrt[n]{x+۱}-\sqrt[n]{x}$، برای مقدارهای مثبت x، تابعی نزولی است، زیرا برای مشتق آن داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{n\sqrt[n]{(x+۱)^{n-۱}}}-\frac{۱}{n\sqrt[n]{x^{n-۱}}}<۰$$

(مخرج کسر اول، ازمخرج کسر دوم بزرگتراست). اکنون اگر فرض کنیم $x_۱=k-۱$ و $x_۲=k$ $(k>۱)$، چون $x_۲>x_۱$، پس $f(x_۲)<f(x_۱)$، یعنی

$$\sqrt[n]{k+۱}-\sqrt[n]{k}<\sqrt[n]{k}-\sqrt[n]{k-۱}\Longrightarrow\sqrt[n]{k+۱}+\sqrt[n]{k-۱}<۲\sqrt[n]{k}$$

که اگر $k=۵۰۰$ و $n=۳$ بگیریم، به‌جواب مسالهٔ ۴۰۱) می‌رسیم:

$$\sqrt[۳]{۵۰۱}+\sqrt[۳]{۴۹۹}<۲\sqrt[۳]{۵۰۰}$$

۵) درهمان تابع نزولی $y=\sqrt[n]{x+۱}-\sqrt[n]{x}$ $(x>۰)$ ازمسألهٔ قبل $x_۱=۴$ و $x_۲=۶$ می‌گیریم. چون $x_۱<x_۲$، پس $f(x_۱)>f(x_۲)$، یعنی به‌ازای $n=۳$ داریم:

$$\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۴}>\sqrt[۳]{۷}-\sqrt[۳]{۶}\Longrightarrow\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۶}>\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۷}$$

درضمن، مسأله را باراه حل اول مسألهٔ قبل هم می‌توان حل کرد (چگونه؟).

۶) تابع $f(x)=\ln(۱+x)-\frac{۲x}{x+۲}$ را، که‌برای $x>-۱$ معین

است، درنظرمی‌گیریم. مشتق این تابع چنین است:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$$

که به‌ازای $x>-1$ مثبت است، یعنی $f(x)$، برای مقدارهای قابل قبول x، تابعی صعودی است. $x_1=0$ و $x_2=\frac{1}{100}$ می‌گیریم. چون $x_2>x_1$ پس $f(x_2)>f(x_1)$، یعنی

$$\ln\left(1+\frac{1}{100}\right)-\frac{2}{201}>0 \Longrightarrow \ln\frac{101}{100}>\frac{2}{201}$$

۷) در نابرابری روشن زیر (حل تمرین ۴۰۱) را ببینید):

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}>\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

به‌ترتیب عددهای ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ را به‌جای n قرار دهید و نابرابری‌های حاصل را باهم جمع کنید، به‌دست می‌آید:

$$2\sqrt{1}+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{9}>$$
$$>2\sqrt{2}+2\sqrt{4}+2\sqrt{6}+2\sqrt{8}+\sqrt{10}$$

۸) ثابت می‌کنیم: $\sqrt[7]{17}<\frac{3}{2}<\log_{17}71$. نابرابری اول را می‌توان، به‌ترتیب، به‌این صورت نوشت:

$$2\sqrt[7]{17}<3 \Longrightarrow 2^7\times 17<3^7 \Longrightarrow 2176<2187$$

ونابرابری دوم، به‌این صورت درمی‌آید:

$$17^{\frac{3}{2}}<71 \Longrightarrow 17^3<71^2 \Longrightarrow 4913<5041$$

پاسخ: $\sqrt[7]{17}<\log_{17}71$.

۹) داریم:

$$tg\,55^\circ = tg(45^\circ + 10^\circ) = \frac{1 + tg\,10^\circ}{1 - tg\,10^\circ}$$

ازطرف دیگر $tg\,10^\circ = tg\frac{\pi}{18} > \frac{\pi}{18} > \frac{1}{6}$؛ وچون تابع $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$، تابعی صعودی است، بنابراین

$$tg\,55^\circ > \frac{1+\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{7}{5}$$

۱۰) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ رادیان و $\frac{1}{2}$ رادیان، هردو، کمان‌هایی بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ هستند و برای هرکمان x که بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ باشد، داریم $\sin x < x$؛ بنابراین

$$\cos\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\frac{1}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\sqrt{3}}{4} - \sin\frac{1}{2} > 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

پاسخ. $\cos\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$.

۱۱) ثابت می‌کنیم $\sqrt[8]{8} > \sqrt[9]{9}$. اگردوطرف نابرابری رابه‌توان ۷۲ برسانیم، به‌نابرابری $8^9 > 9^8$ یا $2^{27} > 3^{16}$ می‌رسیم که هم‌ارز نابرابری اصلی است. داریم:

$$2^{27} = (2^9)^3 = 512^3 > (2\times 243)^3 = 8\times 3^{15} > 3\times 3^{15} = 3^{16}$$

۱۲) ثابت می‌کنیم: $x > \sqrt{x-1} + \sqrt{x(\sqrt{x}-1)}$ دو نابرابری

$$\frac{x}{2} \geqslant \sqrt{x-1} \quad \text{و} \quad \frac{x}{2} \geqslant \sqrt{x(\sqrt{x}-1)} \qquad (1)$$

همیشه (به‌ازای $x > 1$) برقرارند، زیرا، منجر به‌این دونابرابری واضح می‌شوند.

$$(x-2)^2 \geqslant 0 \quad \text{و} \quad (\sqrt{x}-2)^2 \geqslant 0 \qquad (2)$$

در ضمن، اولی به‌ازای $x=2$ و دومی به‌ازای $x=4$، به برابری تبدیل می‌شود. از مجموع دونا برابری (۱)، با توجه به‌این که‌علامت‌های برابری در (۲) به‌طور هم‌زمان پیش نمی‌آید، نتیجه می‌شود:

$$x>\sqrt{x-1}+\sqrt{x(\sqrt{x}-1)}$$

۱۳) در واقع باید ببینیم، از دو عدد 100^n و 101^n-99^n کدام بزرگترند! این نسبت را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{101^n-99^n}{100^n}=\frac{(100+1)^n-(100-1)^n}{100^n}=$$

$$=\frac{2C_n^1\cdot 100^{n-1}+2C_n^3\cdot 100^{n-3}+\dots}{100^n}=$$

$$=2\left(\frac{n}{100}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!100^3}+\dots\right)$$

ثابت می‌کنیم، این نسبت، به‌ازای $n=49$ بزرگتر ازواحد و به‌ازای $n=48$ کوچکتر ازواحد است (که دراین صورت، به‌ازای هرعدد $n>49$ ازواحد بزرگتر و به‌ازای هرعدد $n<48$ ازواحدکوچکتر می‌شود). به‌ازای $n=49$ داریم:

$$2\left(\frac{49}{100}+\frac{49\times 48\times 47}{3!\cdot 100^3}+\dots\right)>2\left(\frac{49}{100}+\frac{18424}{100^3}\right)>$$

$$>2\left(\frac{49}{100}+\frac{100^2}{100^3}\right)=1$$

و به‌ازای $n=48$:

$$2\left(\frac{48}{100}+\frac{48\times 47\times 46}{3!\cdot 100^3}+\frac{48\times 47\times 46\times 45\times 44}{5!\cdot 100^5}+\dots\right)<$$

$$<2\left(\frac{48}{100}+\frac{48^3}{3!\cdot 100^3}+\frac{48^5}{(3!)^2\cdot 100^5}+\frac{48^7}{(3!)^3\cdot 100^7}+\dots\right)=$$

$$=2\times\frac{\frac{48}{100}}{1-\frac{1}{6}\left(\frac{48}{100}\right)^2}=\frac{9600}{9616}<1$$

پاسخ. عدد 99^n+100^n، برای $n\leqslant 48$ از 101^n بزرگتر و برای $n>48$ از 101^n کوچکتراست.

۱۴) دنبالهٔ n عدد درست متوالی رادرنظرمی گیریم:

$$a, a+1, a+2, \ldots, a+n-1$$

دوجمله ازاین دنباله‌که به فاصلهٔ k از دوانتهای دنبالـه باشند (یعنی kامین جمله از ابتدا به‌انتها و kامین جمله ازانتها به‌ابتدا)، چنین‌اند:

$$a+k-1 \text{ و } a+n-k$$

حاصل ضرب این دوعدد را به‌دست می‌آوریم:

$$(a+k-1)(a+n-k)=a^2+an-a+(k-1)(n-k)\geqslant$$
$$\geqslant a^2+an-a=a(a+n-1)$$

(برابری، تنها برای $k=1$ و $k=n$ پیش می‌آید). بنابراین، حاصل ضرب دوعدد $a+k-1$ و $a+n-k$ (که در حالت فرد بودن n، ممکـن است برابرهم باشند)، ازحاصل ضرب دوجملهٔ اول وآخر دنباله (کوچکترین و بزرگترین جملهٔ دنباله)،کمتر نیست. به این ترتیب، برای حاصل ضرب همهٔ جمله‌های دنباله، داریم:

$$a(a+1)\cdots(a+n-1)\geqslant[a(a+n-1)]^{\frac{n}{2}}=\sqrt{a^n(a+n-1)^n}$$

(برابری، تنها برای $n=1$ و $n=2$ پیش می‌آید). یعنی

پیش‌قضیه. برای $n>2$، حاصل ضرب n عدد درست متوالی، همیشه ازریشهٔ دوم حاصل‌ضرب توان nام کوچکترین و بزرگترین عدد، بزرگتراست.

با استفاده ازاین پیش‌قضیه، ثابت می‌کنیم: $300!<100^{300}$. باتوجه به‌پیش قضیه‌ای‌که ثابت‌کردیم، داریم:

$$1\times 2\times 3\times \dots \times 25>\sqrt{25^{25}}=5^{25};$$

$$26\times 27\times \dots \times 50>\left(\sqrt{26\times 50}\right)^{25}>35^{25};$$

$$51\times 52\times \dots \times 100>\left(\sqrt{51\times 100}\right)^{50}>70^{50};$$

$$101\times 102\times \dots \times 200>\sqrt{100^{100}}\cdot\sqrt{200^{100}}=10^{200}\cdot 2^{50};$$

$$201\times 202\times \dots \times 300>\sqrt{200^{100}\cdot 300^{100}}=10^{200}\cdot 2^{50}\cdot 3^{50}$$

که ازضرب آنها به‌دست می‌آید:

$$300!>5^{25}\cdot 35^{25}\cdot 70^{50}\cdot 10^{400}\cdot 2^{100}\cdot 3^{50}=$$

$$=10^{500}\cdot 21^{25}\cdot 42^{25}\cdot 14^{25}>10^{500}\cdot 20^{25}\cdot 40^{25}\cdot 14^{25}=$$

$$=10^{550}\cdot 2^{25}\cdot 4^{25}\cdot 14^{25}=10^{550}\cdot 112^{25}>10^{600}=100^{300}$$

۱۵) اگرعبارت‌های مفروض را A و B بنامیم، داریم:

$$\frac{1}{A}=\frac{(1+a+\dots+a^{n-1})+a^{n}}{1+a+\dots+a^{n-1}}=1+\frac{a^{n}}{1+a+\dots+a^{n-1}}=$$

$$=1+\frac{1}{\frac{1}{a^{n}}+\frac{1}{a^{n-1}}+\dots+\frac{1}{a}};\ \frac{1}{B}=1+\frac{1}{\frac{1}{b^{n}}+\frac{1}{b^{n-1}}+\dots+\frac{1}{b}}$$

به این ترتیب (باتوجه به‌شرط $a>b>0$) روشن است که

$$\frac{1}{A}>\frac{1}{B} \text{ یا } B>A$$

۱۶) درمسألهٔ ۳ (صفحهٔ ۹)، این تمرین را، برای حالت خاص $x=1$ حل کردیم. دراین‌جا، باحالت کلی آن و برای x دلخواه سروکارداریم. روشن است، راه حلی‌که برای این حالت کلی مورد استفاده قرار می‌گیرد، برای هرحالت خاص هم می‌تواند کاربرداشته باشد. داریم:

$$\cos\sin x-\sin\cos x=\cos\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\sin x\right)=$$

$$=2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\cos x+\sin x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\cos x-\sin x}{2}$$

از طرف دیگر روشن است که

$$|\sin x+\cos x|=\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\leqslant\sqrt{2} \text{ و } |\sin x-\cos x|\leqslant\sqrt{2}$$

(برابری درحالت اول برای $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ و در حالت دوم برای $x=kn-\frac{\pi}{4}$ پیش می‌آید). درضمن $\frac{\pi}{2}\approx 1/57$ و $\sqrt{2}\approx 1/41$، یعنی $\frac{\pi}{2}>\sqrt{2}$ و

$$0<\frac{\frac{\pi}{2}+\cos x+\sin x}{2}<\frac{\pi}{2} \text{ و } 0<\frac{\frac{\pi}{2}+\cos x-\sin x}{2}<\frac{\pi}{2}$$

به‌این ترتیب $\cos\sin x-\sin\cos x>0$ و $\cos\sin x>\sin\cos x$.

۱۷) اگر فرض کنیم $a=\log_2\pi$ و $b=\log_\pi 2$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}2^a=\pi\\ \pi^b=2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}2^a=\pi\\ 2^{\frac{1}{b}}=\pi\end{cases}\Longrightarrow a=\frac{1}{b}$$

که از آن‌جا خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_\pi 2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}+a=\frac{a^2+1}{a}>2$$

($\log_2\pi\neq 1$، یعنی $a\neq 1$).

پاسخ. $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_\pi 2}>2$.

۱۸) با فرض $a=\log_2\pi$ و $b=\log_5\pi$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} 2^a=\pi \\ 5^b=\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \pi^{\frac{1}{a}}=2 \\ \pi^{\frac{1}{b}}=5 \end{cases} \Longrightarrow \pi^{\frac{1}{a}} \times \pi^{\frac{1}{b}}=10$$

به این ترتیب

$$\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2$$

زیرا $\pi^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=10$ و $10>\pi^2$.

۱۹) ثابت می‌کنیم، با شرط $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$، نابرابری $\sin\beta-\sin\alpha>\beta-\alpha$ برقرار است. با توجه به این‌که در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی $x>\sin x>0$ و $1>\cos x>0$، داریم:

$$\sin\beta-\sin\alpha=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2}<2\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot 1=\beta-\alpha$$

پاسخ: $\alpha-\sin\alpha>\beta-\sin\beta$.

۲۰) ثابت می‌کنیم

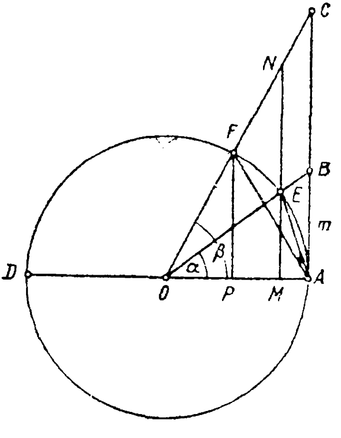
$\beta-\alpha<tg\beta-tg\alpha$.

در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی داریم

$x<tg x$، درنتیجه، با توجه به‌شرط $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ به‌دست می‌آید:

$$\beta-\alpha<tg(\beta-\alpha)=\frac{tg\beta-tg\alpha}{1+tg\beta\, tg\alpha}<tg\beta-tg\alpha$$

پاسخ: $tg\beta-\beta>tg\alpha-\alpha$.



شکل ۱۵

۲۱) با توجه به‌نام گذاری‌های

شکل ۱۰ داریم:

$$\widehat{AE}=\alpha، \quad \widehat{AF}=\beta،$$

$$|AB|=tg\alpha، \quad |AC|=tg\beta$$

M و N، به ترتیب، نقطه‌های برخورد خط‌های راست OA و OC با عمودی است که از E بر (OA) رسم شده‌است. این برابری‌ها روشن است:

$$S_{\Delta OAB}=\frac{۱}{۲}tg\alpha، \quad S_{\Delta OAC}=\frac{۱}{۲}tg\beta، \quad S_{\text{قطاع}\,OAE}=\frac{۱}{۲}\alpha، \quad S_{\text{قطاع}\,OAF}=\frac{۱}{۲}\beta$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{قطاع}\,OAE}}=\frac{tg\alpha}{\alpha}, \qquad \frac{S_{\Delta OAC}}{S_{\text{قطاع}\,OAF}}=\frac{tg\beta}{\beta}$$

از طرف دیگر، با استفاده از تشابه مثلث‌های OAB و OME و، همچنین، مثلث‌های OAC و OMN، به سادگی می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OME}}=\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OEN}} \qquad (۱)$$

درضمن

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{قطاع}\,OAE}}<\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OME}}, \qquad \frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\text{قطاع}\,OEF}}>\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OEN}} \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{قطاع}\,OAE}}<\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\text{قطاع}\,OEF}} \Longrightarrow \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{قطاع}\,OAE}}<\frac{S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OBC}}{S_{\text{قطاع}\,OAE}+S_{\text{قطاع}\,OEF}}$$

یعنی $\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{قطاع}\,OAE}}<\frac{S_{\Delta OAC}}{S_{\text{قطاع}\,OAF}}$ یا $\frac{tg\alpha}{\alpha}<\frac{tg\beta}{\beta}$.

یادداشت. در اثبات تمرین ۱ . ۲۱) از این قضیهٔ مربوط به نابرابری‌ها استفاده کردیم: اگر a، b، c، d عددهایی مثبت باشد و برای آن‌ها داشته باشیم $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$، آن‌وقت نابرابری $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$ برقرار است.

برای اثبات فرض می‌کنیم $\frac{a}{b}=k$، در این صورت $\frac{c}{d}=k+\alpha$

$(\alpha>0)$، زیرا $\frac{c}{d}$ از $\frac{a}{b}$ بزرگتراست. بنابراین

$$a=bk،\ \ c=dk+d\alpha$$

ازمجموع این دوبرابری به‌دست می‌آید:

$$a+c=(b+d)k+d\alpha \Longrightarrow \frac{a+c}{b+d}=k+\frac{d\alpha}{b+d}>k$$

یعنی $k=\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$.

۲۲) ثابت می‌کنیم $2\alpha<\sin\alpha+tg\alpha$. داریم:

$$\sin\alpha+tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{4tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^4\frac{\alpha}{2}} \qquad (1)$$

روشن است که $1-tg^4\frac{\alpha}{2}<1$، درضمن $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$، بنابراین $0<tg^4\frac{\alpha}{2}<1$

و $1-tg^4\frac{\alpha}{2}>0$. اگردوطرف نابرابری $1-tg^4\frac{\alpha}{2}<1$ را معکوس کنیم به

نابرابری $\frac{1}{1-tg^4\frac{\alpha}{2}}>1$ می‌رسیم. درنتیجه، باتوجه به (۱):

$$\sin\alpha+tg\alpha>4tg\frac{\alpha}{2}>4\times\frac{\alpha}{2}=2\alpha$$

پاسخ: $tg\alpha-\alpha>\alpha-\sin\alpha$.

۲۰۱) البته، بامخرج مشترك گرفتن می‌توان کسرها راباهم مقایسه‌کرد. ولی بامقایسهٔ دوبه‌دوی کسرها هم می‌توان به نتیجه رسید. ابتدا یك پیش‌قضیه

راثابت می‌کنیم.

پیش قضیه. اگر به صورت و مخرج یک کسر، عددی مثبت اضافه‌کنیم، کسر مفروض به واحد نزدیک‌تر می‌شود، یعنی درحالتی که کسر بزرگتراز واحد باشد،کوچکتر ودرحالتی که کوچکتر از واحد باشد، بزرگتر می‌شود.

باید ثابت‌کنیم، برای $0<a<b$ و $m>0$ داریم: $\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$.

اگرکسرسمت راست را، به سمت چپ نابرابری ببریم، بعد از تبدیل به یک مخرج به دست می‌آید:

$$\frac{a}{b}-\frac{a+m}{b+m}=\frac{(a-b)m}{b(b+m)}<0$$

($a<b$، یعنی $a-b<0$).

به همین ترتیب، برای حالت $a>b>0$، می‌توان به نتیجه رسید.

اکنون به مقایسهٔ کسرها می‌پردازیم.

$\frac{۵}{۶}$ را با $\frac{۶۲۷}{۷۲۷}$ مقایسه می‌کنیم. داریم:

$$\frac{۵}{۶}=\frac{۵۰۰}{۶۰۰}<\frac{۵۰۰+۱۲۷}{۶۰۰+۱۲۷}=\frac{۶۲۷}{۷۲۷}\Longrightarrow\frac{۵}{۶}<\frac{۶۲۷}{۷۲۷}$$

می‌دانیم، اگرمخرج کسری را بزرگ کنیم، مقدار کسر کوچکتر می‌شود، بنا براین

$$\frac{۵}{۶}=\frac{۵\times۱۱}{۶\times۱۱}=\frac{۵۵}{۶۶}>\frac{۵۵}{۶۹}$$

به‌این ترتیب تا این‌جا ثابت شد:

$$\frac{۵۵}{۶۹}<\frac{۵}{۶}<\frac{۶۲۷}{۷۲۷}$$

برای کسر $\frac{۵۱۱}{۶۵۵}$ داریم:

$$\frac{۵۱۱}{۶۵۵}<\frac{۵۱۱+۳۹}{۶۵۵+۳۹}=\frac{۵۵۰}{۶۹۴}<\frac{۵۵۰}{۶۹۰}=\frac{۵۵}{۶۹}$$

$$\frac{۵۱۱}{۶۵۵} < \frac{۵۵}{۶۹} < \frac{۵}{۶} < \frac{۶۲۷}{۷۲۷}$$

وسر انجام

$$\frac{۵۱۱}{۶۵۵} > \frac{۵۱۱-۱۱}{۶۵۵-۱۱} = \frac{۵۰۰}{۶۴۴} > \frac{۵۰۰}{۷۰۰} = \frac{۵}{۷}$$

پاسخ: $\frac{۵}{۷} < \frac{۵۱۱}{۶۵۵} < \frac{۵۵}{۶۹} < \frac{۵}{۶} < \frac{۶۲۷}{۷۲۷}$

۲) اگر یك رادیان را بــه تقریب، برابر ۵۷ درجه و ۱۷ دقیقه و ۴۵ ثانیه بگیریم، به‌ترتیب داریم:

$$\text{کمان ۲ رادیان} = ۱۱۴^\circ ۳۵' ۳۰'' = ۱۸۰^\circ - (۶۵^\circ ۲۴' ۳۰''),$$

$$\text{کمان ۳ رادیان} = ۱۷۱^\circ ۵۳' ۱۵'' = ۱۸۰^\circ - (۸^\circ ۶' ۴۵''),$$

$$\text{کمان ۴ رادیان} = ۲۲۹^\circ ۱۱' ۰'' = ۱۸۰^\circ + (۴۹^\circ ۱۱' ۰''),$$

$$\text{کمان ۵ رادیان} = ۲۸۶^\circ ۲۸' ۴۵'' = ۳۶۰^\circ - (۷۳^\circ ۳۱' ۱۵''),$$

$$\text{کمان ۶ رادیان} = ۳۴۳^\circ ۴۶' ۳۰'' = ۳۶۰^\circ - (۱۶^\circ ۱۳' ۳۰''),$$

$$\text{کمان ۷ رادیان} = ۴۰۱^\circ ۴' ۱۵'' = ۳۶۰^\circ + (۴۱^\circ ۴' ۱۵'')$$

ودیگر روشن است که

$$\sin ۵ < \sin ۴ < \sin ۶ < \sin ۳ < \sin ۷ < \sin ۱ < \sin ۲$$

۳) با فرض $x = \sqrt[۳]{۳} + \sqrt[۳]{۹}$ داریم:

$$x^۳ = (\sqrt[۳]{۳} + \sqrt[۳]{۹})^۳ = ۱۲ + ۳\sqrt[۳]{۲۷}(\sqrt[۳]{۳} + \sqrt[۳]{۹}) = ۱۲ + ۹x$$

یعنی $\sqrt[۳]{۳} + \sqrt[۳]{۹}$، ریشهٔ عبارت درجهٔ سوم $f(x) = x^۳ - ۹x - ۱۲$ است. درضمن

$$f(\sqrt[۳]{۴۳}) = ۳۱ - ۹\sqrt[۳]{۴۳} < ۰$$

درواقع، داریم:

$$(۹\sqrt[۳]{۴۳})^۳ = ۷۲۹ \times ۴۳ > ۷۰۰ \times ۴۳ = ۳۰۱۰۰ > ۲۹۷۹۱ > ۳۱^۳$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $f(\sqrt[3]{44})>0$، $f(x)$ در بازهٔ [۳، ۴] صعودی است و چون $f(\sqrt[3]{43})<f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})<f(\sqrt[3]{44})$، بنابراین

$$\sqrt[3]{43}<\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}<\sqrt[3]{44}$$

۳. روشن است که در این پنج عدد، باید رقم دهگان هر عدد از رقم یکان آن بزرگتر باشد، زیرا، درصورت عکس، با عدد کوچکتری سروکار پیدا می‌کنیم. بنابراین رقم ۹، در عدد مربوط به خودش، رقم دهگان عدد است. ثابت می‌کنیم، رقم یکان این عدد باید صفر باشد. رقم یکان این عدد را، برابر $a\neq 0$ می‌گیریم و صفر را رقم یکان عددی فرض می‌کنیم که، دهگان آن، برابر b است. حاصل‌ضرب این دو عدد، چنین می‌شود:

$$(90+a)(10b+0)=900b+10ab \qquad (1)$$

ولی اگر صفر را یکان عددی بگیریم که، دهگان آن، برابر ۹ است، برای حاصل‌ضرب دو عدد داریم:

$$(90+0)(10b+a)=900b+90a \qquad (2)$$

(۱) و (۲) را مقایسه می‌کنیم. چون $b<9$، پس $10b<90$ و $10ab<90a$. به این ترتیب، عدد (۱) از عدد (۲) کوچکتر است و برای این که حاصل‌ضرب عددها، حداکثر باشد، باید برای دهگان ۹، رقم یکان را برابر صفر گرفت.

اکنون باید به کمک رقم‌های از ۱ تا ۸، چهار عدد دو رقمی بسازیم که حاصل‌ضربی ماکزیمم داشته باشند. شبیه حالت قبل، می‌توان ثابت کرد که، یکی ازاین عددها برابر ۸۱ است وغیره.

پاسخ: ۹۰، ۸۱، ۷۲، ۶۳، ۵۴.

۴. داریم:

$$(\sqrt{30}+\sqrt{4320})^{103}=[\sqrt{30}(1+\sqrt{144})]^{103}=$$

$$=30^{\frac{103}{2}}(1+12)^{103}$$

بنابراین، باید بزرگترین جمله را در بسط $(1+12)^{103}$ پیدا کنیم. جملهٔ $(k+1)$ام بسط را، T_{k+1} می‌نامیم و آن را بزرگترین جملهٔ بسط می‌گیریم.

باید داشته باشیم:

$$T_{k+1} \geqslant T_{k+2} \quad \text{و} \quad T_{k+1} \geqslant T_k$$

که ما را به این دونابرابری می‌رساند:

$$\begin{cases} \dfrac{103!}{k!(103-k)!} \cdot 12^k \geqslant \dfrac{103!}{(k+1)!(102-k)!} \cdot 12^{k+1} \\ \dfrac{103!}{k!(103-k)!} \cdot 12^k \geqslant \dfrac{103!}{(k-1)!(104-k)!} \cdot 12^{k-1} \end{cases}$$

که بعد از ساده‌کردن، به‌این‌صورت درمی‌آیند:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{103-k} \geqslant \dfrac{12}{k+1} \\ \dfrac{12}{k} \geqslant \dfrac{1}{104-k} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k \geqslant 95 \\ k \leqslant 96 \end{cases} \Longrightarrow 95 \leqslant k \leqslant 96$$

یعنی جمله‌های ۹۶ام و ۹۷ام باهم برابرند و بزرگترین جمله‌های بسط را تشکیل می‌دهند.

۵. فرض می‌کنیم $\sqrt{p-a}=x$، $\sqrt{p-b}=y$ و $\sqrt{p-c}=z$. در این صورت، باید ثابت کنیم:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} < x+y+z \leqslant \sqrt{3x^2+3y^2+3z^2}$$

زیرا

$$x^2+y^2+z^2=(p-a)+(p-b)+(p-c)=3p-2p=p$$

نابرابری سمت چپ، منجر به‌نابرابری $2(xy+yz+xz)>0$ می‌شود که روشن است (x و y و z، مقدارهایی مثبت‌اند). نابرابری سمت راست هم، منجر به‌این نابرابری اتحادی می‌شود:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqslant 0$$

علامت برابری، برای $x=y=z$، یعنی $a=b=c$ (مثلث متساوی‌الاضلاع) پیش می‌آید.

۶. فرض می‌کنیم $a\geqslant b\geqslant c>0$. اگر داشته باشیم $a\geqslant b+c$، درستی نابرابری روشن است، زیرا سمت راست نابرابری عددی مثبت و سمت چپ آن عددی غیرمثبت می‌شود بنابراین، حالتی را درنظر می‌گیریم که $a<b+c$. دراین حالت، همهٔ عامل‌های سمت چپ نابرابری غیرمنفی‌هستند و داریم:

$$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)=$$

$$=\sqrt{(b-c+a)(c+a-b)(c-a+b)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}=$$

$$=\sqrt{[a^۲-(b-c)^۲][b^۲-(c-a)^۲][c^۲-(a-b)^۲}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{a^۲b^۲c^۲}=abc$$

۷. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{t^۳+۱}{t-۱}-۴-۲\sqrt{۳}=$$

$$=\frac{(t-۱)^۲+[۳t^۲-۲(۳+\sqrt{۳})t+۵+۲\sqrt{۳}]}{t-۱}>0$$

زیرا، درصورت کسر ودرداخل کروشه، عبارت دوجه دومی با مبین منفی قرار دارد وبا توجه به‌شرط $t>۱$، مخرج کسرهم مثبت است. بنابراین

$$\frac{t^۳+۱}{t-۱}>۲(۲+\sqrt{۳})$$

۸. روشن است که $a^۲+b^۲\geqslant ۲ab$ و $c^۲+d^۲\geqslant ۲cd$. همچنین، مجموع دوعدد عکس هم، وقتی مثبت باشند، از ۲ کوچکتر نیست، یعنی برای $x>0$ داریم: $x+\frac{1}{x}\geqslant 0$.

اکنون می‌نویسیم:

$$\sum a^2+\sum ab=a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+$$
$$+bd+cd\geqslant 3\,(ab+cd)+(ac+bd)+(ad+bc)=$$
$$=3\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+\left(ac+\frac{1}{ac}\right)+\left(ad+\frac{1}{ad}\right)\geqslant 6+2+2=10$$

(از برابری $abcd=1$ استفاده کردیم).

۰۹. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و a_k را نخستین جمله‌ای از آن می‌گیریم که مثبت باشد:

$$a_k>0\ ,\ a_i\leqslant 0\ (i<k)$$

بنا بر فرض داریم:

$$a_{k-1}-2a_k+a_{k+1}\geqslant 0$$

یعنی $a_{k+1}-a_k\geqslant a_k-a_{k-1}>0$ (a_{k-1} غیرمثبت و a_k مثبت است، بنابراین تفاضل a_k-a_{k-1} مثبت می‌شود)؛ که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $a_{k+1}>a_k$، یعنی a_{k+1} هم باید مثبت باشد. با آغاز از a_{k+1} می‌توان نتیجه گرفت که a_{k+2} مثبت است. اگر به‌همین ترتیب ادامه دهیم، نتیجه می‌شود:

$$a_n>a_{n-1}>\dots>a_{k+1}>a_k>0$$

درحالی‌که بنا بر فرض داریم $a_n=0$. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۰۱۰. از نابرابری روشن $a^2+b^2\geqslant 2ab$ به دست می‌آید: $a^2-ab+b^2\geqslant ab$. باضرب دوطرف نابرابری اخیر در $a+b$، به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$a^3+b^3\geqslant a^2b+b^2a \qquad (1)$$

به‌همین ترتیب، دونابرابری مشابه (۱) به‌دست می‌آید:

$$b^3+c^3\geqslant b^2c+c^2b \qquad (2)$$

$$c^3+a^3\geqslant c^2a+a^2c \qquad (3)$$

وازمجموع نابرابری‌های (۱) و(۲) و (۳):

$$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geqslant$$
$$\geqslant 2a^2\sqrt{bc}+2b^2\sqrt{ca}+2c^2\sqrt{ab}$$

(از نابرابری روشن $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$، برای x و y مثبت، استفاده کردیم).
به‌این ترتیب

$$a^3+b^3+c^3\geqslant a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$$

علامت برابری، برای حالت $a=b=c$ پیش می‌آید.

۱۱. اگر $a=1+\alpha$ و $b=1+\beta$ بگیریم، برابری $a^3+b^3=2$، به صورت

$$\alpha^3+\beta^3+3(\alpha+\beta)+3(\alpha^2+\beta^2)=$$
$$=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta\alpha+\beta^2+3)+3(\alpha^2+\beta^2)=0$$

درمی‌آید که در آن، جملهٔ $3(\alpha^2+\beta^2)$ غیرمنفی است و، بنابراین، باید جملهٔ

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta\alpha+\beta^2+3)=(\alpha+\beta)\left[\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)^2+\frac{3\beta^2}{4}+3\right]$$

غیرمثبت باشد؛ ولی مقدار داخل کروشه مثبت است، یعنی باید داشته باشیم:

$$\alpha+\beta\leqslant 0\Longrightarrow(a-1)+(b-1)\leqslant 0\Longrightarrow a+b\leqslant 2$$

۱۲. این سه جمله‌ای درجه دوم را درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=2x^2-(a+b+c+d)x+(ad+bc)$$

به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$f(a)=(a-b)(a-c)\ ,\ f(b)=(b-a)(b-d)$$

از آن‌جا

$$f(a)f(b)=-(a-b)^2(a-c)(b-d)$$

وچون بنابرفرض $a>c$ و $b>d$، بنابراین

$$f(a)\,f(b)\leqslant ۰$$

یعنی سه جمله‌ای درجه دوم $f(x)$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است و مبین آن باید مثبت باشد:

$$(a+b+c+d)^۲>۸\,(ad+bc)$$

۱۳. تعداد دانش‌آموزان گروه اول را x می‌گیریم. بنابراین تعداد دانش‌آموزان پسر در گروه دوم برابر $x-۱۵$ می‌شود. گروه اول روی هم ۴۸ ساعت و، بنابراین، هر دانش‌آموز گروه اول $\frac{۴۸}{x}$ ساعت نگهبانی داده است. دانش‌آموزان پسر گروه دوم روی هم ۲۱ ساعت و، بنابراین، هر نفر $\frac{۲۱}{۱۵-x}$ ساعت به نگهبانی مشغول بوده است. بنابر شرط مسأله باید داشته باشیم:

$$\frac{۲۱}{۱۵-x}+\frac{۴۸}{x}<۹ \implies \frac{(x-۸)(x-۱)}{x(۱۵-x)}<۰$$

که به‌جواب $۰>x$ یا $۱۰>x>۸$ یا $۱۵<x$ می‌رسد. تعداد دانش‌آموزان گروه اول نمی‌تواند منفی یا بزرگتر از ۱۵ باشد، پس $۱۰>x>۸$ و چون x عددی درست است، بنابراین $x=۹$. درهر گروه ۹ دانش‌آموز بوده است.

۱۴. اگر تعداد قطعه‌های جعبهٔ اول را x و تعداد قطعه‌های جعبهٔ دوم را y بگیریم، باید داشته باشیم:

$$x+y>۲۹ \;,\; x-۲>۳y \;,\; ۲y+۶۰>۳x$$

که می‌توان آن‌ها را این‌طور نوشت:

$$x>۲۹-y \quad , \quad x>۳y+۲ \quad , \quad \frac{۲}{۳}y+۲۰>x \qquad (۱)$$

یعنی $\frac{۲}{۳}y+۲۰>۲۹-y$ و $\frac{۲}{۳}y+۲۰>۳y+۲$، که جواب مشترک آن‌ها به‌صورت $۵\frac{۲}{۵}<y<۷\frac{۵}{۷}$ درمی‌آید و چون y عددی درست

است، می‌تواند برابر ۶ یا ۷ باشد. $y=6$ قابل قبول نیست، زیرا به‌ازای آن، ازنامعادله‌های (۱) بـه‌دست می‌آید $x>23$، $x>20$ و $x<24$ که، درنتیجه، برای x، عدد درستی پیدا نمی‌شود. پس $y=7$. ودراین صورت، ازنامعادله‌های (۱) خواهیم داشت:

$$x>22 \text{ ، } x>23 \text{ ، } x<24\frac{2}{3}$$

که تنها $x=24$ جواب مشترك آن‌هاست.

پاسخ: جعبهٔ اول شامل ۲۴ قطعه وجعبهٔ دوم شامل ۷ قطعه است.

۱۵. تعداد اتومبیل‌های کارخانـهٔ اول را درهرشبانه روز x می‌گیریم. تعداد اتومبیل‌های تولیدی کارخانهٔ دوم، قبل‌از بازسازی $\frac{95x}{100}$ و بـعـد از بازسازی $\frac{95x}{100}+\frac{23x}{100}$ می‌شود. بنابراین

$$x\leqslant 950 \text{ ، } \frac{95x}{100}+\frac{23x}{100}>1000$$

کـه ازآن جـا بـه‌دست می‌آید: $847\frac{27}{59}<x\leqslant 950$. عددهای $\frac{23x}{100}$ و $\frac{95x}{100}$ باید عددهای درستی باشند، یعنی x بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است. بنابراین $x=900$.

پاسخ: کارخانهٔ اول ۹۰۰ وکارخانهٔ دوم ۸۵۵ اتومبیل.

۱۶. فرض می‌کنیم، درآلیاژجدیدکه ۴۰ درصد منگنز دارد، x کیلوگرم ازآلیاژاول، y کیلوگرم ازآلیاژ دوم و z کیلوگرم ازآلیاژسوم مصرف شده باشد. بنابراین، با توجه به‌فرض مسأله، باید داشته باشیم:

$$0/9y+0/6z=0/4(x+y+z) \Longrightarrow 4x=5y+2z \quad (1)$$

درآلیاژجدیـد $(0/7x+0/1y+0/25z)$ کیلوگرم مس ودرهر کیلوگرم آن به‌اندازهٔ

$$M=\frac{0/7x+0/1y+0/25z}{x+y+z}$$

کیلوگرم مس وجود دارد که، باتوجه به (۱) به‌دست می‌آید:

$$M=\frac{۱۳y+۸z}{۳۰y+۲۰z}$$

دراین رابطه، y و z می‌توانند مقدارهای دلخواه غیرمنفی را، به‌شرط $y^۲+z^۲\neq ۰$، اختیار کنند. سه حالت درنظرمی‌گیریم:

الف) $y=۰$ و $z\neq ۰$؛ دراین صورت $M=\frac{۲}{۵}$؛

ب) $y\neq ۰$ و $z=۰$، دراین‌صورت $M=\frac{۱۳}{۳۰}$؛

ج) $y\neq ۰$ و $z\neq ۰$، دراین صورت

$$M=\frac{۱۳+\frac{۸z}{y}}{۳۰+\frac{۲۰z}{y}}=\frac{۱۲+\frac{۸y}{z}}{۳۰+\frac{۲۰y}{z}}+\frac{۱}{۳۰+\frac{۲۰y}{z}}=$$

$$=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۳۰+\frac{۲۰y}{z}}$$

که از آن نتیجه می‌شود: $\frac{۲}{۵}<M<\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۳۰}=\frac{۱۳}{۳۰}$

پاسخ: حداکثر مقدارمس در آلیاژ جدید $۴۳\frac{۱}{۳}$ درصد وحداقل آن ۴۰ درصد می‌تواند باشد.

۱۷. دوحالت درنظرمی‌گیریم:

الف) $۰\leqslant x\leqslant ۲$، یعنی $|x-۲|=-x+۲$ و

$$f(x)=x^۳+۲x^۲-۴x\ ;\quad f'(x)=۳x^۲+۴x-۴$$

$f'(x)=۰$ دوجواب دارد: $x=-۲$ و $x=\frac{۲}{۳}$، که تنها $x=\frac{۲}{۳}$ در بازهٔ $[۰, ۲]$ واقع است.

$f'(x)$ درنقطهٔ $x=\frac{۲}{۳}$ تغییرعلامت می‌دهد وازمنفی به مثبت می‌رود،

بنابراین $f(x)$ درنقطهٔ $x=\frac{۲}{۳}$ می‌نیمم است.

ب) $۲<x\leqslant ۳$، یعنی $|x-۲|=x-۲$ و

$$f(x)=x^{۳}-۲x^{۲}+۴x،\quad f'(x)=۳x^{۲}-۴x+۴>۰$$

$f(x)$ دربازهٔ $[۲،۳]$ می‌نیمم نسبی ندارد.

برای پیداکردن حداکثرمقدار تابع در بازهٔ $[۰، ۳]$، بایـد مقدارهای تابع را درنقطه‌های مرزی مقایسه‌کنیم:

$$f(۰)=۰،\quad f(۲)=۸،\quad f(۳)=۲۱$$

حداکثر مقدارتابع دراین بازه، برابر ۲۱ است.

۱۸۰. چون O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث است، بنابراین پاره خطهـای راست OA، OB و OC، نیمسازهای زاویه‌های مثلث‌اند ومثلاً

$$\widehat{AOB}=۱۸۰^{\circ}-\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}$$

می‌دانیم، درهر مثلث، نسبت طول یك ضلـع برسینوس زاویهٔ روبه‌روی آن، برابر باقطردایرهٔ محیطی مثلث است. به‌این ترتیب، در مثلث‌هـای ABC و ABO داریم:

$$|AB|=۲R\sin\hat{C}=۴R\sin\frac{\hat{C}}{۲}\cos\frac{\hat{C}}{۲},$$

$$|AB|=۲R_{۳}\sin\left(۱۸۰^{\circ}-\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}\right)=۲R_{۳}\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}=۲R_{۳}\cos\frac{\hat{C}}{۲}$$

از آن جا $۲R_{۳}\cos\frac{\hat{C}}{۲}=۴R\sin\frac{\hat{C}}{۲}\cos\frac{\hat{C}}{۲}$، یعنی $R_{۳}=۲\sin\frac{\hat{C}}{۲}$. به همیـن ترتیب: $R_{۲}=۲R\sin\frac{\hat{B}}{۲}$ و $R_{۱}=۲R\sin\frac{\hat{A}}{۲}$. درنتیجه

$$R_۱^۲+R_۲^۲+R_۳^۲=۴R^۲\left(\sin^۲\frac{\hat{A}}{۲}+\sin^۲\frac{\hat{B}}{۲}+\sin^۲\frac{\hat{C}}{۲}\right)\geqslant$$

$$\geqslant ۴R^۲\times\frac{۳}{۴}=۳R^۲$$

(برای اثبات نابرابری $\sin^۲\frac{\hat{A}}{۲}+\sin^۲\frac{\hat{B}}{۲}+\sin^۲\frac{\hat{C}}{۲}\geqslant\frac{۳}{۴}$، تمرین ۲۰۲۸ ۲) وحل آن را ببینید).

۱۰۱۹ ۱) جذرتقریبی نقصانی و جذرتقریبی اضافی هریك از جمله‌های A را، تا ۰/۱ تقریب، محاسبه می‌کنیم:

$$۱=۱،\quad ۰/۷<\frac{۱}{\sqrt{۲}}<۰/۸،\quad ۰/۵<\frac{۱}{\sqrt{۳}}<۰/۶،$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۴}}=۰/۵،\quad ۰/۴<\frac{۱}{\sqrt{۵}}<۰/۵،\quad ۰/۴<\frac{۱}{\sqrt{۶}}<۰/۵$$

که ازمجموع آن‌ها به‌دست می‌آید: $۳/۵<A<۳/۹$ وبنابراین $[A]=۳$.

۲) این تمرین، با تمرین قبل تفاوت اساسی ندارد، باوجود این، بسه علت زیادی تعداد جمله‌ها، نمی‌توان با محاسبهٔ مستقیم به‌نتیجه رسید. ابتـدا یك پیش‌قضیه را ثابت می‌کنیم.

پیش‌قضیه. فرض می‌کنیم: $x=۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۴}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{n}}$. ثابت کنید:

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{n}<\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲\sqrt{n}-۲\sqrt{n-۱}\qquad(۱)$$

$$۲\sqrt{n}-۲<x<۲\sqrt{n}-۱\qquad(n>۱)\qquad(۲)$$

اثبات. درستی نابرابری‌های (۱) به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{n}=۲(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})=$$

$$=\frac{۲}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}<\frac{۲}{۲\sqrt{n}}=\frac{۱}{\sqrt{n}},$$

$$۲\sqrt{n}-۲\sqrt{n-۱}=۲(\sqrt{n}-\sqrt{n-۱})=$$

$$=\frac{۲}{\sqrt{n}+\sqrt{n-۱}}>\frac{۲}{۲\sqrt{n}}=\frac{۱}{\sqrt{n}}$$

برای اثبات نابرابری‌های (۲)، درنابرابری‌های (۱)، به‌جای n، به ترتیب، عددهای ۲، ۳، ۴، ...، n را قرار می‌دهیم، به‌دست می آید:

$$۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}<\frac{۱}{\sqrt{۲}}<۲\sqrt{۲}-۲$$

$$۲\sqrt{۴}-۲\sqrt{۳}<\frac{۱}{\sqrt{۳}}<۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}$$

$$۲\sqrt{۵}-۲\sqrt{۴}<\frac{۱}{\sqrt{۴}}<۲\sqrt{۴}-۲\sqrt{۳}$$

. . . .

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{n}<۲\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲\sqrt{n}-۲\sqrt{-۱}$$

که ازمجموع آن‌ها نتیجه می‌شود:

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{۲}<x-۱<۲\sqrt{n}-۲$$

یا، بااضافه‌کردن یك واحد به همهٔ جمله‌ها

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{۲}+۱<x<۲\sqrt{n}-۱$$

چون $۲\sqrt{۲}<۳$ و $\sqrt{n+۱}>\sqrt{n}$، ازنابرابری‌های اخیر می‌توان نتیجه گرفت:

$$۲\sqrt{n}-۲<x<۲\sqrt{n}-۱$$

پیش‌قضیه ثابت شد.

اکنون، اگردرنابرابری‌های (۲)، قرار دهیم $n=۱۰۰۰۰۰۰$، به-

دست می‌آید:

$$۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}-۲<B<۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}-۱$$

ویا $۱۹۸۸<B<۱۹۹۹$، یعنی $[B]=۱۹۹۸$.

۳) درپیش‌قضیه‌ای‌که هم‌اکنون درحل تمرین ۲۰۱۹) آوردیم، دیدیم:

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{n}<\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲\sqrt{n}-۲\sqrt{n-۱}$$

این بستگی را می‌توان، به مفهومی، تعمیم داد $m<n$ می‌گیریم و در این نابرابری‌ها، به ترتیب n را برابر m، $m+۱$، $m+۲$، ...، n فرض می‌کنیم و، سپس نابرابری‌های حاصل رابا هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{m}<\frac{۱}{\sqrt{m}}+\frac{۱}{\sqrt{m+۱}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{n}}<$$
$$<۲\sqrt{n}-۲\sqrt{m-۱}$$

اکنون‌اگر، $m=۱۰۰۰۰$ و $n=۱۰۰۰۰۰۰$ بگیریم،خواهیم‌داشت:

$$۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۱}-۲\sqrt{۱۰۰۰۰}<\frac{C}{۵۰}<۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}-۲\sqrt{۹۹۹۹}$$

وچون داریم:

$$۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۱}>۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}=۲۰۰۰،$$
$$۲\sqrt{۱۰۰۰۰}=۲۰۰،\ ۲\sqrt{۹۹۹۹}=\sqrt{۳۹۹۹۶}>۱۹۹/۹۸$$

به‌دست می‌آید:

$$۱۸۰۰<\frac{C}{۵۰}<۱۸۰۰/۲$$

وسرانجام، باضرب همهٔ جمله‌هادر ۵۰، خواهیم داشت:

$$۹۰۰۰۰<C<۹۰۰۰۱$$

یعنی $[C]=۹۰۰۰۰$.

۲۰. $\sqrt{n}=k+\alpha$ می‌گیریم کـه، در آن، k عـددی است درست و $0\leqslant\alpha<1$. داریم:

$$\{\sqrt{n}\}=\sqrt{n}-[\sqrt{n}]=\sqrt{n}-k$$

نابرابری‌های فرض، به‌این صورت درمی‌آیند:

$$\frac{3}{10}<\sqrt{n}-k<\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{3}{10}+k<\sqrt{n}<\frac{1}{3}+k$$

همهٔ جمله‌ها مثبت‌اند ومی‌توان آن‌ها را مجذور کرد:

$$k^2+\frac{3}{5}k+\frac{9}{100}<n<k^2+\frac{2}{3}k+\frac{1}{9}$$

اگر k را برابر ۰، ۱، ۲ بگیـریم، بـرای n عدد درستی بـه دست نمی‌آید. به‌ازای $k=3$ داریم:

$$10+\frac{89}{100}<n<11+\frac{1}{9}\Longrightarrow n=11$$

$n=11$ کوچکترین عدد طبیعی است که درشرط مسأله صدق می‌کند.

۲۱. ۱) داریم:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

نابرابری سمت چپ ثابت شد. بـرای نابرابری سمت راست، بـه ترتیب می‌نویسیم:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2n-2}\right)+\right.$$

$$\left.+\dots+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2+(n-1)}+\right.$$

$$+\frac{3n}{2n^2+2(n-1)}+\dots+\frac{3n}{2n^2}\Big]<$$

$$<\frac{1}{2}\left(\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2}+\dots+\frac{3n}{2n^2}\right)=\frac{1}{4}(n+1)\frac{3}{n}=$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{3}{4n}<\frac{3}{4}+\frac{1}{n}$$

بنابراین $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}$.

۲) این نابرابری روشن است:

$$\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$$

برای نابرابری سمت راست داریم:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{3n-1}+\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}\right)<$$

$$<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2n}{n}=2$$

و برای نابرابری سمت چپ، به‌ترتیب می‌نویسیم:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{3n+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{3n}\right)+$$

$$+\dots+\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{n+1}\right)\Big]=$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2}+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-(n-1)^2}+$$

$$+\dots+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2}\Big]>\frac{1}{2}\Big[\frac{4n+2}{(2n+1)^2}+\frac{4n+2}{(2n+1)^2}+\dots$$

$$\cdots+\frac{4n+2}{(2n+1)^2}\Bigg]=\frac{1}{2}(2n+1)\frac{4n+2}{(2n+1)^2}=1$$

۳) با توجه به برابری روشن $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ داریم:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}<1$$

اکنون، برای نابرابری مفروض می‌توان نوشت:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\left(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2\times 3}+$$

$$+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=1\frac{3}{4}-\frac{1}{n}<1\frac{3}{4}$$

۴) فرض می‌کنیم:

$$a=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100},\ \ b=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{100}{101}$$

روشن است که $a<b$، زیرا هرعامل a از عامل متناظر خود در b کوچکتر است:

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\ \frac{3}{4}<\frac{4}{5},\ \frac{5}{6}<\frac{6}{7},\ \ldots,\ \frac{99}{100}<\frac{100}{101}$$

بنابراین $a^2<ab$ و

$$a^2<ab=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdots\left(\frac{99}{100},\frac{100}{101}\right)=\frac{1}{101}$$

یعنی $a^2<\frac{1}{101}$ و $a<\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{10}$.

۵) نابرابری را با روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. نابرابری به‌ازای $n=1$ به‌برابری تبدیل می‌شود: $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$، و به ازای $n=2$

درست است:

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}<\frac{۱}{\sqrt{۷}}\Longrightarrow\frac{۳}{۸}<\frac{۱}{\sqrt{۷}}\Longrightarrow\frac{۹}{۶۴}<\frac{۱}{۷}\Longrightarrow\frac{۹}{۶۴}<\frac{۹}{۶۳}$$

اکنون فرض می‌کنیم، نابرابری به‌ازای $n=k$ درست باشد:

$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۴}{۵}\cdots\frac{۲k-۱}{۲k}<\frac{۱}{\sqrt{۳k+۱}}$$

باضرب دوطرف این‌نابرابری در $\frac{۲k+۱}{۲k+۲}$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdots\frac{۲k-۱}{۲k}\cdot\frac{۲k+۱}{۲k+۲}<\frac{۱}{\sqrt{۳k+۱}}\cdot\frac{۲k+۱}{۲k+۲}$$

بنابراین، کافی است ثابت‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۳k+۱}}\cdot\frac{۲k+۱}{۲k+۲}<\frac{۱}{\sqrt{۳k+۴}}$$

اگردوطرف ایـن نابرابری رادر $(۲k+۲)\sqrt{۳k+۱}\cdot\sqrt{۳k+۴}$ ضرب وسپس، دوطرف را مجذورکنیم، بعداز ساده‌کردن، به‌این صورت درمی‌آید:

$$۱۲k^۳+۲۸k^۲+۱۹k+۴<(۱۲k^۳+۲۸k^۲+۱۹k+۴)+k$$

که درستی‌آن روشن است.

یادداشت. درتمرین (۴۰۲۱) ثابت‌کردیم:

$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۵}{۶}\cdots\frac{۹۹}{۱۰۰}<\frac{۱}{۱۰}$$

این نابرابری را می‌توان قوی‌ترکرد. اگردرنابرابری تمرین (۵۰۲۱) قرار دهیم $n=۵۰$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۵}{۶}\cdots\frac{۹۹}{۱۰۰}<\frac{۱}{\sqrt{۱۵۱}}<\frac{۱}{\sqrt{۱۴۴}}=\frac{۱}{۱۲}$$

۶) درتمرین (۲۰۱۹) ثابت‌کردیم (صفحهٔ ۱۵۳):

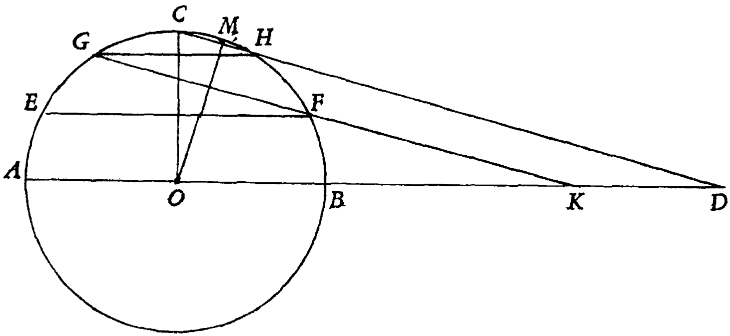
$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1} \qquad (1)$$

اکنون، اگر در (۱)، مقدار n را، به‌ترتیب، برابر m، $m+1$، $m+2$، ...، n بگیریم و، سپس، نابرابری‌های حاصل را باهم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{m}<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\dots+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{m-1}$$

۰۲۲ ۱) نقطهٔ برخورد خط راست GF را با $[OD]$ با حرف K نشان می‌دهیم و E را به B وصل می‌کنیم. به سادگی می‌توان ثابت کرد: $[EB]||[GF]||[CH]$ (شکل ۱۱ را ببینید). درنتیجه



شکل ۱۱

$$|GH|=|KD| \text{ و } |EF|=|BK|$$

وبنابراین
$$|OD|=|EF|+|GH|+R$$

درکتاب «مساحت شکل‌های مسطحه وکروی»، فرزندان موسی‌بن‌شاکر (که درزمان مأمون خلیفهٔ عباسی می‌زیسته‌اند)، این قضیه را برای حالتی ثابت کرده‌اند که، ربع دایرهٔ BC، به‌سه بخش برابر تقسیم شده باشد (همان-

طورکه دراین‌جا ثابت شده است). ولی، همان طورکه بنوموسی یادآوری می‌کنند، این قضیه درحالت کلی، وقتی‌که ربع دایرهٔ BC به n بخش برابر تقسیم شده باشد، درست است و همیشه باهمین روش استدلال می‌توان ثابت کرد که:

$$|OD| = (\text{طول شعاع دایره}) + (\text{مجموع طول های وترهای موازی})$$

۲) مثلث های قائم الزاویهٔ OCM و OMD متشابه‌اند (چرا؟) و بنابراین

$$\frac{|OC|}{|OD|}=\frac{|CM|}{|OM|} \Longrightarrow |OM|\cdot|OC| = |CM|\cdot|OD| \qquad (۱)$$

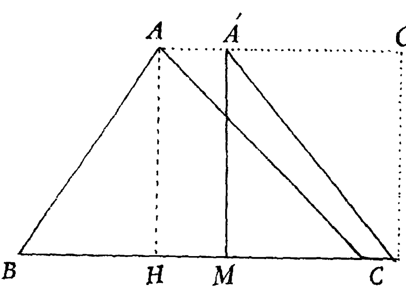
$|OM|<|OC|=R$ وبنابراین

$$|OM|^۲<|OM|\cdot|OC|<R^۲$$

اگر دراین نابرابری‌ها، به‌جای $|OM|\cdot|OC|$ ازرابطهٔ (۱) قراردهیم، باتوجه به $|CM|=\frac{۱}{۲}|CH|$ به‌دست می‌آید:

$$|OM|^۲<\frac{۱}{۲}|HC|\cdot|OD|<R^۲$$

یادداشت. بنوموسی، براساس‌این دوقضیه وقضیهٔ دیگری (که نتیجه‌ای ازاین دوقضیه است)، ثابت‌کرده‌اندکه : الف) سطح‌کره برابراست باچهار برابرمساحت دایرهٔ عظیمهٔ آن‌و ب) حجم‌کره برابراست باحاصل‌ضرب شعاع دریك‌سوم سطح آن.



شکل ۱۲

۲۳. چهاروجهی $SABC$ را می‌گیریم وفرض می‌کنیم، طول همهٔ یال‌های آن، به جز SA، از واحد تجاوز نکند. ارتفاع AH در مثلث ABC (قاعدهٔ چهاروجهی) را $h_۱$ می‌نامیم وازنقطهٔ M، وسط پاره‌خط راست BC، عمودی به طول $h_۱$ بر

BC اخراج می‌کنیم (شکل ۱۲). روشن است که $|CA'| \leqslant |CA|$، بنابراین

$$|CA'|^2 \leqslant |CA|^2 \Longrightarrow h_1^2 + \frac{a^2}{4} \leqslant b^2 \Longrightarrow h_1^2 \leqslant 1 - \frac{a^2}{4}$$

($a = |BC|$، $b = |AC|$ گرفته‌ایم؛ در ضمن، درمثلث قائم‌الزاویهٔ $A'MC$ به‌دست می‌آید: $|CA'|^2 = h_1^2 + \frac{a^2}{4}$؛ نابرابری آخر به‌دلیل $b \leqslant 1$ درست است). از این‌جا $h_1 \leqslant \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$. به‌همین ترتیب اگر درمثلث SBC، طول ارتفاع وارد از رأس S بر ضلع BC را h_2 بنامیم، خواهیم داشت $h_2 \leqslant \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$ (درمثلث SBC هم، هیچ ضلعی ازواحد تجاوز نمی‌کند). درضمن، درحالتی‌که مثلث‌های ABC و SBC متساوی‌الاضلاع باشند، به‌برابری‌های $h_1 = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$ و $h_2 = h_1$ می‌رسیم.

اکنون، اگر ارتفاع چهاروجهی را، که ازرأس S برصفحهٔ قاعدهٔ ABC فرود آمده است، h بگیریم، روشن است که $h \leqslant h_2$ و برای V، حجم چهاروجهی داریم:

$$V = \frac{1}{3} h \cdot S_{ABC} \leqslant \frac{1}{3} h_2 \cdot \left(\frac{1}{2} a h_1\right) \leqslant \frac{1}{6} a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} a \left(1 + \frac{a}{2}\right)\left(1 - \frac{a}{2}\right) \leqslant \frac{1}{6} a \cdot \frac{3}{2}\left(1 - \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{8}(2a - a^2) =$$

$$= \frac{1}{8}[1 - (a-1)^2] \leqslant \frac{1}{8}$$

علامت برابری، وقتی به‌دست می‌آید که، اولاً $a = 1$، ثانیاً $h = h_2$ باشد، یعنی وقتی‌که همهٔ یال‌های چهاروجهی، به‌جز SA، برابر واحد باشند و در ضمن، صفحهٔ SBC برصفحهٔ ABC عمود باشد.

۲۴. چون دنباله غیرصعودی است، بنابراین $a_1 = \frac{1}{2k}$ و چون مجموع

همهٔ عددهای دنباله برابر واحد است، بنابراین تعداد این عددها نمی‌تواند کمتر از $2k$ باشد. فرض می‌کنیم در k عدد اول دنباله، کوچکترین عدد، از نصف بزرگترین عدد، بزرگتر نباشد، یعنی $a_k \leqslant \frac{1}{2}a_1$؛ همچنین برای k عدد a_k، a_{k+1}، …، a_{2k-1} داشته باشیم $a_{2k-1} \leqslant \frac{1}{2}a_k \leqslant \frac{1}{4}a_1$؛ به‌همین ترتیب، اگر $n \geqslant 3k-1$ باشد، برای k عدد از a_{2k-1} تا a_{3k-2}، نابرابری

$$a_{3k-2} \leqslant \frac{1}{2}a_{2k-1} \leqslant \frac{1}{8}a_1$$

برقرار می‌شود و غیره. بنابراین

$$a_1 + a_k + a_{2k-1} + a_{3k-2} \leqslant \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)a_1 < 2a_1$$

به‌همین ترتیب، اگر k عدد متوالی را، از a_2 آغاز کنیم، به‌دست می‌آید:

$$a_2 + a_{k+1} + a_{2k} + a_{3k-1} + \cdots < 2a_2 < 2a_1$$

و با آغاز از a_3، a_4، …،

$$a_3 + a_{k+2} + a_{2k+1} + a_{3k} + \cdots < 2a_1$$

$$a_4 + a_{k+3} + a_{2k+2} + a_{3k+1} + \cdots < 2a_1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_{k-1} + a_{2k-2} + a_{3k-3} + \cdots < 2a_1$$

ازمجموع همهٔ این نابرابری‌ها (به تعداد $k-1$) نتیجه می‌شود:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < k \times 2a_2 = 2k \cdot \frac{1}{2k} = 1$$

که شرط مسأله را نقض می‌کند. بنابراین، دست‌کم، در یکی از این k جملهٔ متوالی، باید کوچکترین عدد، از نصف بزرگترین عدد، بزرگتر باشد.

۲۵. ابتدا این نابرابری‌ها را، برای $n \in \mathbf{N}$، ثابت می‌کنیم:

$$\left(1+\frac{2}{3n}\right)^3>\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \text{ و } \left(1-\frac{2}{3n}\right)^3>\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \qquad (1)$$

داریم:

$$\left(1+\frac{2}{3n}\right)^3=1+\frac{2}{n}+\frac{4}{3n^2}+\frac{8}{27n^3},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$$

که در دوجملهٔ اول برابرند و، درضمن، $\frac{4}{3n^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n^2}$. نابرابری سمت راست (۱) هم، به‌همین ترتیب ثابت می‌شود.

از نابرابری سمت چپ (۱) به دست می‌آید $1+\frac{2}{3n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}$، که اگردوطرف آن را در $n^{\frac{2}{3}}$ ضرب کنیم:

$$n^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3n^{\frac{1}{3}}}>(n+1)^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right)$$

وباروشی مشابه، ازنابرابری سمت راست (۱) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$$

به‌این‌ترتیب:

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right)<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right) \qquad (2)$$

بنابراین، ازیك طرف، باتوجه به نابرابری سمت راست (۲) داریم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}>\frac{3}{2}[(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{4^2})+$$

$$+(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{5^2})]+\dots+(\sqrt[3]{1000001^2}-\sqrt[3]{1000000^2})=$$

$$=\frac{3}{2}(\sqrt[3]{1000001^2}-\sqrt[3]{16})>\frac{3}{2}\times 10000-\sqrt[3]{64}=$$

$$=15000-4=14996$$

و از طرف دیگر، با توجه به نابرابری سمت راست (۲):

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}<\frac{3}{2}(\sqrt[3]{1000000^2}-\sqrt[3]{9})<$$

$$<\frac{3}{2}(10000-2)=14997$$

و در نتیجه $[A]=14996$.

۲۶. تعداد عددهای k رقمی را که شامل رقم ۹ نباشند، n_k می‌گیریم. روشن است که $n_1=8$ (صفر را به حساب نیاورده‌ایم، زیرا نمی‌تواند در مخرج قرار گیرد) و $n_2=8\times 9$، زیرا در سمت راست هر عدد یک رقمی از ۱ تا ۸، تنها ۹ رقم از ۰ تا ۸ را می‌توان قرارداد و با عدد یک رقمی ۹ هم، نمی‌توان عدد دو رقمی درست کرد (به‌یادداشته باشیم که، در عددهای ما، نباید رقم ۹ وجود داشته باشد). به‌طور کلی، اگر $10^k\leqslant a<10^{k+1}$ باشد، برای تعداد عددهای a (بدون رقم ۹) داریم:

$$n_{k+1}=9n_k$$

زیرا، اگر یکی از عددهای $10^{k-1}\leqslant b<10^k$ را، که بدون رقم ۹ است، در نظر بگیریم، تنها با گذاشتن یکی از رقم های ۰ تا ۸ در سمت راست آن، می‌توان به یکی از عددهای a رسید.

اکنون به مجموع مورد نظر می‌پردازیم و کسرها را تا $n<10^{m+1}$ در نظر می‌گیریم. از این کسرها، آن‌هایی را که در مخرج خود، رقم ۹ دارند، کنار می‌گذاریم و بقیه را به این صورت می‌نویسیم:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\dots+\frac{1}{88}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\dots+\frac{1}{888}\right)+\dots+\left(\frac{1}{10^m}+\frac{1}{10^m+1}+\right.$$

$$+\underbrace{\frac{1}{88\ldots88}}_{m+1\ \text{مرتبه}}\Big) \leqslant 1\times n_1+\frac{1}{10}\cdot n_2+\frac{1}{100}\cdot n_3+\ldots+$$

$$+\frac{1}{10^{m-1}}\cdot n_m+\frac{1}{10^m}n_{m+1}$$

(روشن است که مقدار هر پرانتز، از حاصل‌ضرب بزرگترین جمله در تعداد جمله‌های آن کوچکتر است). از طرف دیگر داریم:

$$1\times n_1+\frac{1}{10}\times n_2+\frac{1}{100}\times n_3+\cdots+\frac{1}{10^m}\cdot n_{m+1}=$$

$$=8\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9^2}{10^2}+\cdots+\frac{9^m}{10^m}\right)=$$

$$=8\times\frac{1-\frac{9^{m+1}}{10^{m+1}}}{1-\frac{9}{10}}<8\times\frac{1}{1-\frac{9}{10}}=80$$

۲۷. اگر همهٔ نابرابری‌ها را با هم جمع کنیم، سمت چپ نابرابری، برابر صفر می‌شود و، بنابراین به‌ناچار، دستگاه نابرابری‌ها به‌دستگاه برابری‌ها تبدیل می‌شود:

$$a_1-4a_2+3a_3=0,\ \ldots,\ a_{100}-4a_1+3a_2=0$$

که می‌توان آن‌ها را به‌این صورت نوشت:

$$a_1-a_2=3(a_2-a_3),\ a_2-a_3=3(a_3-a_4),\ \ldots$$

$$\ldots,\ a_{99}-a_{100}=3(a_{100}-a_1),\ a_{100}-a_1=3(a_1-a_2)$$

یعنی

$$a_1-a_2=3(a_2-a_3)=3^2(a_3-a_4)=\ldots=3^{100}(a_1-a_2)$$

برابری $a_1-a_2=3^{100}(a_1-a_2)$، تنها با شرط $a_1=a_2$ برقرار است. ولی دراین صورت، با توجه به برابری $a_1-a_2=3(a_2-a_3)$ به دست

می‌آید: $a_2=a_3$ ... تا آخر. دستگاه تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$a_1=a_2=a_3=\ \dots\ =a_{100}=10$$

۱۰۲۸) ازبرابری فرض، باتبدیل حاصل‌ضرب دوسینوس به تفاضل دوکسینوس، به‌دست می‌آید:

$$\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}=2m+\sin\frac{\hat{A}}{2}$$

اگر $2m+\sin\frac{\hat{A}}{2}=\cos\alpha$ و $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ بگیریم (چون

$$\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}<\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$$

بنابراین، α زاویه‌ای‌است حاده (که البته، برابرصفرهم می‌تواندباشد)، داریم:

$$\hat{B}-\hat{C}=2\alpha,\ \ \hat{B}+\hat{C}=\pi-\hat{A}$$

ازآن‌جا $\hat{B}=\frac{\pi}{2}-\frac{\hat{A}}{2}+\alpha$ و $\hat{C}=\frac{\pi}{2}-\frac{\hat{A}}{2}-\alpha$.

برای این‌که مسأله جواب داشته باشد، باید داشته باشیم:

$2m+\sin\frac{A}{2}\leqslant 1$ درضمن از نابرابری $\alpha<\frac{\pi}{2}-\frac{\hat{A}}{2}$ به دست می‌آید:

$\cos\alpha>\sin\frac{\hat{A}}{2}$. به‌این ترتیب، به‌نابرابری‌های زیرمی‌رسیم:

$$\sin\frac{\hat{A}}{2}<2m+\sin\frac{\hat{A}}{2}\leqslant 1$$

واز نابرابری سمت راست، شرط وجود جواب به‌دست می‌آید:

$$m\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{\hat{A}}{2}\right)\qquad(1)$$

۲) الف) اگر درشرط (۱) از مسألهٔ بالا، به جای m، مقدار آن

$\sin\frac{\hat{B}}{۲}\sin\frac{\hat{C}}{۲}$ را قراردهیم، به نابرابری $\sin\frac{\hat{B}}{۲}\sin\frac{\hat{C}}{۲}\leqslant\frac{۱}{۲}\left(۱-\sin\frac{\hat{A}}{۲}\right)$ می‌رسیم. اگر دوطرف این نابرابری را درمقدار مثبت $\sin\frac{\hat{A}}{۲}$ ضرب کنیم، به‌ترتیب داریم:

$$\sin\frac{\hat{A}}{۲}\sin\frac{\hat{B}}{۲}\sin\frac{\hat{C}}{۲}\leqslant\frac{۱}{۲}\left(\sin\frac{\hat{A}}{۲}-\sin^{۲}\frac{\hat{A}}{۲}\right)=$$

$$=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۴}-\left(\frac{۱}{۲}-\sin\frac{\hat{A}}{۲}\right)^{۲}\right]\leqslant\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۸}$$

یعنی $\sin\frac{\hat{A}}{۲}\sin\frac{\hat{B}}{۲}\sin\frac{\hat{C}}{۲}\leqslant\frac{۱}{۸}$؛ علامت برابری برای مثلث متساوی‌الاضلاع است (چرا؟).

ب) داریم:

$$\sin^{۲}\frac{A}{۲}+\sin^{۲}\frac{B}{۲}+\sin^{۲}\frac{C}{۲}=\frac{۱-\cos A}{۲}+\frac{۱-\cos B}{۲}+\sin^{۲}\frac{C}{۲}=$$

$$=۱-\cos\frac{A+B}{۲}\cos\frac{A-B}{۲}+\sin\frac{C}{۲}\cos\frac{A+B}{۲}=$$

$$=۱-\sin\frac{C}{۲}\left(\cos\frac{A-B}{۲}-\cos\frac{A+B}{۲}\right)=$$

$$=۱-۲\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}>۱-۲\times\frac{۱}{۸}=\frac{۳}{۴};$$

$$\cos^{۲}\frac{A}{۲}+\cos^{۲}\frac{B}{۲}+\cos^{۲}\frac{C}{۲}=۳-\left(\sin^{۲}\frac{A}{۲}+\sin^{۲}\frac{B}{۲}+\sin^{۲}\frac{C}{۲}\right)\leqslant$$

$$\leqslant ۳-\frac{۳}{۴}=\frac{۹}{۴}$$

۲۹. نابرابری موردنظر را می‌توان، به‌ترتیب چنین نوشت:

$$2(tg x - \sin x) < tg^3 x \Leftrightarrow 2 tg x(1 - \cos x) < tg^3 x \Leftrightarrow$$

$$2(1 - \cos x) < \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 2\cos^2 x < 1 + \cos x$$

واین نابرابری، برای $0 < x < \frac{\pi}{2}$، همیشه برقرار است، زیرا دراین بازه همیشه داریم $\cos^2 x < \cos x$ و $\cos^2 x < 1$.

۳۰. باتوجه به‌نابرابری $tg x > x$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ داریم:

$$\sin\alpha + tg\alpha = \frac{2\, tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{2\, tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\, tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^4\frac{\alpha}{2}} > 4 tg\frac{\alpha}{2} > 2\alpha$$

به‌همین ترتیب $\sin\beta + tg\beta > 2\beta$ و $\sin\gamma + tg\gamma > 2\gamma$. از مجموع این سه نابرابری به‌دست می‌آید:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + tg\alpha + tg\beta + tg\gamma > 2(\alpha + \beta + \gamma) = \pi$$

۳۱. الف) به‌ازای $n = 6$، نابرابری‌ها برقرارند:

$$\left(\frac{6}{3}\right)^6 = 64،\ \ 6! = 720،\ \ \left(\frac{6}{2}\right)^6 = 729$$

اثبات را با استقرای ریاضی می‌دهیم. فرض می‌کنیم نابرابری‌ها به‌ازای $n = k$ برقرار باشند وثابت می‌کنیم:

$$\left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1} < (k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}$$

از تقسیم جمله‌های این نابرابری برجمله‌های نظیر در نابرابری $\left(\frac{k}{3}\right)^k < k! < \left(\frac{k}{2}\right)^k$ به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{k+۱}{۳}\right)^{k+۱}:\left(\frac{k}{۳}\right)^{k}<k+۱<\left(\frac{k+۱}{۲}\right)^{k+۱}:\left(\frac{k}{۲}\right)^{k}$$

و یا $(k+۱)\frac{\left(۱+\frac{۱}{k}\right)^{k}}{۲}>k+۱>(k+۱)\frac{\left(۱+\frac{۱}{k}\right)^{k}}{۳}$؛ و بعد از تقسیم همهٔ جمله‌ها بر $(k+۱)$:

$$\frac{\left(۱+\frac{۱}{k}\right)^{k}}{۳}<۱<\frac{\left(۱+\frac{۱}{k}\right)^{k}}{۲}$$

که با توجه به نابرابری‌های $۳>\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}>۲$ درست است (قضیهٔ ۰۱ را ببینید).

ب) این نابرابری‌ها هم، با روش استقرای ریاضی ثابت می‌شوند. نابرابری به‌ازای $n=۱$ برقرار است. فرض می‌کنیم نابرابری سمت چپ به ازای $n=k$ برقرار باشد و ثابت می‌کنیم، در این صورت، به‌ازای $n=k+۱$ هم برقرار است، یعنی

$$(k+۱)!>\left(\frac{k+۱}{e}\right)^{k+۱} \qquad (*)$$

به‌ترتیب داریم (از نابرابری $۱<\frac{e}{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}}$ که نتیجه‌ای از نابرابری $e>\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}$ است، استفاده کرده‌ایم؛ درمتن درس این فصل ثابت کردیم $\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}<e<\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱}$؛ صفحهٔ ۳۲ را ببینید):

$$(k+۱)!=(k+۱)\cdot k!>\left(\frac{k}{e}\right)^{k}\cdot(k+۱)=\left(\frac{k+۱}{e}\right)^{k+۱}\times$$

$$\times\frac{k^{k}\cdot e}{(k+۱)^{k}}=\left(\frac{k+۱}{e}\right)^{k+۱}\cdot\frac{e}{\left(۱+\frac{۱}{k}\right)^{k}}>\left(\frac{k+۱}{e}\right)^{k+۱}$$

اکنون به اثبات نابرابری سمت راست می‌پردازیم. نابرابری $n!<n\left(\frac{n}{e}\right)^n$ به ازای $n=۷$ برقرار است. در واقع باید ثابت کنیم $۷!<۷\left(\frac{۷}{e}\right)^۷$ یا $۶!<\left(\frac{۷}{e}\right)^۷$. از دو طرف نابرابری، در مبنای e، لگاریتم می‌گیریم:

$$\ln ۶!=\ln ۷۲۰\approx ۶/۵۸<\ln\left(\frac{۷}{e}\right)^۷=۷(\ln ۷-۱)\approx ۶/۶۲$$

برای اثبات نابرابری (*)، ضمن استفاده از نابرابری $\frac{e}{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱}}<۱$ به‌ترتیب داریم:

$$(k+۱)!=(k+۱)\cdot k!<(k+۱)\cdot k\left(\frac{k}{e}\right)^k=$$

$$=(k+۱)\left(\frac{k+۱}{e}\right)^{k+۱}\cdot\frac{k^{k+۱}\cdot e}{(k+۱)^{k+۱}}=$$

$$=(k+۱)\left(\frac{k+۱}{e}\right)^{k+۱}\cdot\frac{e}{\left(۱+\frac{۱}{k}\right)^{k+۱}}<(k+۱)\left(\frac{k+۱}{e}\right)^{k+۱}$$

یادداشت. نابرابری‌های مسألهٔ ۳۱۰ ب) دقیق‌تر از نابرابری‌های مسألهٔ ۳۱۰ الف) است، یعنی مقدار $n!$ را دقیق‌تر معین می‌کند. مثلاً اگر مقدار e را در نابرابری سمت چپ $۲/۷۲$ $(e<۲/۷۲)$ و در نابرابری سمت راست $۲/۷۱$ $(e>۲/۷۱)$. بگیریم، به دست می‌آید:

$$\left(\frac{n}{۲/۷۲}\right)^n<n!<n\left(\frac{n}{۲/۷۱}\right)^n$$

به‌کمک همین نابرابری‌های مسألهٔ ۳۱۰ ب) می‌توان ثابت کرد:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (**)$$

برابری تقریبی (**)، وقتی n بزرگتر باشد، دقیق‌تر می‌شود به‌نحوی که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

۱۰۳۲. ۱) با توجه به نابرابری $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$ داریم:

$$(1/000001)^{1000000} = \left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000} > 2$$

۲) نسبت دوعدد را تشکیل می‌دهیم. داریم:

$$\frac{1001^{999}}{1000^{1000}} = \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} \cdot \frac{1}{1001} = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \cdot \frac{1}{1001} <$$

$$< 3 \times \frac{1}{1001} < 1$$

به‌این ترتیب: $1000^{1000} > 1001^{999}$.

۳) مسأله‌ای کلی‌تر را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم، برای $n \in \mathbf{N}$ و $n > 2$، داریم:

$$(n+2)^n < n^{n+2} \qquad (*)$$

نابرابری (*) را می‌توان به‌صورت $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n < n^2$ نوشت. با بسط دو‌جمله‌ای سمت چپ این نابرابری، به‌دست می‌آید:

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right]^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n +$$

$$+ n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{n^2} +$$

$$+\cdots<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}+\cdots=$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}=n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-1\right]<$$

$$<n\left[3\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=n\left(2+\frac{3}{n}\right)<n\cdot n=n^{2}$$

(ضمن عمل، از نابرابری $\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}<3$ استفاده کردیم). به این ترتیب $(n+2)^{n}<n^{n+2}$؛ که اگر $n=997$ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$999^{997}<997^{999}$$

۳۳. نابرابری به ازای $n=1$، به برابری تبدیل می‌شود و به‌ازای $n=2$ داریم:

$$\left(2-\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}=2.25 \quad \text{و} \quad 2.25>2$$

چون دنبالهٔ $\left(2-\frac{1}{n}\right)^{n}$، به‌ازای $n\in\mathbf{N}$، صعودی است (به‌شرط $n>1$ داریم $2-\frac{1}{n}>1$، بنابراین با بزرگ شدن n، از یک طرف، مقدار $2-\frac{1}{n}$ بزرگتر می‌شود و، ازطرف دیگر مقدار $\left(2-\frac{1}{n}\right)^{n}$ افزایش می‌یابد)، بنا بر این، اگر فرض‌کنیم $\left(2-\frac{1}{n}\right)^{n}>n$ [فرض استقرا] ،داریم:

$$\left(2-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(2-\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(2-\frac{1}{n}\right)^{n}\left(2-\frac{1}{n}\right)>$$

$$>n\left(2-\frac{1}{n}\right)>\frac{3}{2}n>n+1$$

زیرا، برای $n>2$، اولاً $2-\frac{1}{n}>\frac{3}{2}$ وثانیاً $\frac{3}{2}n>n+1$. به این ترتیب ،

به ازای مقدارهای $n\geqslant 2$ داریم $\left(2-\frac{1}{n}\right)^n>n$ و به ازای $n=1$:
$\left(2-\frac{1}{n}\right)^n=n$.

۳۴. ابتدا $f'(x)$ را پیدا می‌کنیم:

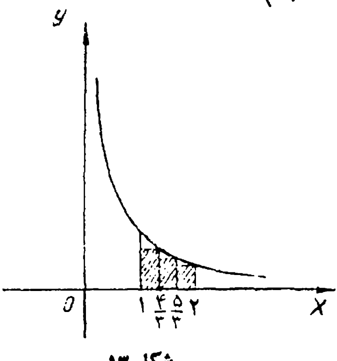
$$f'(x)=\frac{1}{n}[(x+1)(x-2)\cdots(x+n)]^{\frac{1}{n}-1}\times$$
$$\times[(x+1)(x-2)\cdots(x+n)]'$$

بنابراین، با توجه به‌فرد بودن n، به‌دست می‌آید:

$$f'(0)=\frac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\left(n!-\frac{n!}{2}+\frac{n!}{3}-\cdots+\frac{n!}{n}\right)=$$
$$=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)>\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\ln 2$$

(دستور (۱۰) رادرهمین فصل ببینید). از طرف دیگر، درتمرین ۳۱. ب) ثابت کردیم:

$$n!>\left(\frac{n}{e}\right)^n\Longrightarrow\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}>\frac{1}{e}\qquad(*)$$



شکل ۱۳

$\ln 2$ را می‌توان، به تقریب، از جدول لگاریتم‌های طبیعی به دست آورد:

$$\ln 2\approx 0/693>\frac{3}{5}$$

ولی، بدون استفاده از جدول هم، می‌توان مقدار $\ln 2$ را ارزیابی کرد. با توجه به‌شکل ۱۳ داریم:

$$\ln ۲ = \int_{۱}^{۲} \frac{۱}{x} dx > \frac{۱}{۳}\left(\frac{۳}{۴} + \frac{۳}{۵} + \frac{۱}{۲}\right) = \frac{۳۷}{۶۰} > \frac{۳}{۵}$$

درنتیجه داریم:

$$f'(۰) > \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \ln ۲ > \frac{۱}{e} \cdot \frac{۳}{۵} > \frac{۳}{۲/۷۵ \times ۵} = \frac{۱۲}{۵۵}$$

۳۵. فرض کنیم بخواهیم جدول سینوس‌ها را از ۰ درجه تا ۱۰ درجه، تا سه رقم بعداز ممیز محاسبه کنیم. α درجه برابر $\frac{\pi\alpha}{۱۸۰}$ رادیان است و، بنابراین، اگر نابرابری

$$\left|\frac{\pi\alpha}{۱۸۰} - \sin\frac{\pi\alpha}{۱۸۰}\right| < ۰/۰۰۰۵$$

در بازهٔ $\alpha \in [۰، ۱۰]$ برقرار باشد، چنین جدولی‌را می‌توان تشکیل داد، ولی تابع $f(x) = x - \sin x$ دربازهٔ $\left[۰، \frac{\pi}{۱۸}\right]$ صعودی است (مشتق آن مثبت است)، بنابراین کافی‌است ثابت کنیم:

$$\frac{\pi}{۱۸} - \sin\frac{\pi}{۱۸} < ۰/۰۰۰۵$$

واین نابرابری درست نیست ومی‌توان ثابت کرد:

$$\sin\frac{\pi}{۱۸} < \frac{\pi}{۱۸} - ۰/۰۰۰۵$$

اگر عدد π را بارقم‌های بیشتری درنظر بگیریم، به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $\frac{\pi}{۱۸} > ۰/۱۷۴۵$، بنابراین کافی‌است ثابت کنیم:

$$\sin\frac{\pi}{۱۸} < ۰/۱۷۴ \qquad (*)$$

اگر در برابری $\sin ۳\alpha = ۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha$ قرار دهیم

$\alpha=\frac{\pi}{18}$، معلوم می‌شود که $\sin\frac{\pi}{18}$ ریشهٔ معادلهٔ درجه سوم $8x^3-6x+1=0$ است، که با انتخاب $2x=y$، به این معادله می‌رسیم:

$$y^3-3y+1=0$$

ریشهٔ این معادله، برابر است با $y_0=2\sin\frac{\pi}{18}$.

به سادگی (و مثلا به کمك مشتق) روشن می‌شود که تابع $f(y)=y^3-3y+1$ دربازهٔ $[0,1]$ نزولی است و، بنابراین، برای اثبات نابرابری (*) کافی‌است ثابت کنیم $f(0/348)<0$. ودرستی این نابرابری، به‌طورمستقیم به‌دست می‌آید.

۳۶. می‌دانیم $4>\pi>3>e>2$. اگرمرز پایین عددهای e و π را در نظر بگیریم، به‌دست می‌آید $3^2>2^3$؛ ولی‌اگرمرز بالای آن‌ها را به‌حساب آوریم، به نابرابری $4^3>3^4$ می‌رسیم. به‌این ترتیب، ناچاریم دقیق‌تر محاسبه کنیم.

برای این منظور، تابع $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ رادرنظر می‌گیریم. مشتق‌این تابع $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$، برای $x>e$ منفی است، یعنی $f(x)$ دراین بازه نزولی است وچون $e<\pi$، پس

$$\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}\Longrightarrow e^\pi>\pi^e$$

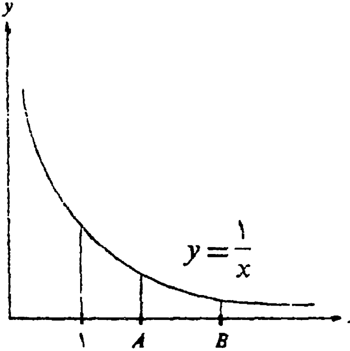
یادداشت. خودتان این دو برابری را ثابت کنید:

$$[\pi]+[\pi^e]=[e]+[e^\pi] \text{ و } [\pi]^{[e]}+[e]=[e]^{[\pi]}+[\pi]$$

$[x]$ یعنی بخش درست عدد x.

ب) $a<b$ می‌گیریم و ثابت می‌کنیم، در حالت $e\leqslant a<b$ داریم $a^b>b^a$ و درحالت $1<a<b\leqslant e$ برعکس $b^a>a^b$.

از این قضیه استفاده می‌کنیم که مساحت زیر منحنی $y=\frac{1}{x}$، در فاصلهٔ $1 \leqslant x \leqslant p$، برابر است با $\ln p$. به این ترتیب، اگر نقطه‌های A و B را، به‌ترتیب، با طول‌های a و b، روی محور xx' انتخاب کنیم (شکل ۱۴)، داریم:



شکل ۱۴

$$(b-a)\cdot\frac{1}{b}<\ln b-\ln a<(b-a)\cdot\frac{1}{a}$$

یا

$$\frac{b-a}{b}+\ln a<\ln b<\frac{b-a}{a}+\ln a \quad (*)$$

حالت اول $e \leqslant a$. دراین‌حالت $b-a \leqslant (b-a)\ln a$ ونابرابری سمت راست (*) را می‌توان این‌طور نوشت:

$$a\ln b<(b-a)\ln a+a\ln a$$

و پس ازساده کردن

$$a\ln b<b\ln a \Longrightarrow b^a<a^b$$

حالت دوم $b \leqslant e$. دراین‌حالت $b-a \geqslant (b-a)\ln b$ ونابرابری سمت چپ (*) به‌این صورت درمی‌آید:

$$(b-a)\ln b+b\ln a<b\ln b$$

و بعد ازساده کردن

$$b\ln a<a\ln b \Longrightarrow a^b<b^a$$

یادداشت. تمرین ۳.۳۲) حالت خاصی ازتمرین ۳۶.ب)است. در آن جا $a=۹۹۷$ و $b=۹۹۹$ وچون $a>e$، پس $۹۹۷^{۹۹۹}>۹۹۹^{۹۹۷}$.

۳۷. $x=\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}$ و $y=\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}}$ مـی‌گیریـم. در ایـن صورت، نابرابری مورد نظر، چنین می‌شود:

$$\frac{x+y}{۲}\leqslant\sqrt[n]{\frac{x^n+y^n}{۲}}\Longrightarrow\left(\frac{x+y}{۲}\right)^n\leqslant\frac{x^n+y^n}{۲}\quad(*)$$

اثبات را به‌کمك استقرای ریاضی می‌دهیم. نابرابری (*)، به‌ازای $n=۱$ و $n=۲$ درست است (خودتان تحقیق کنید). فرض می‌کنیم، نابرابری (*) به ازای $n=k$ درست باشد:

$$\left(\frac{x+y}{۲}\right)^k\leqslant\frac{x^k+y^k}{۲}$$

اگر دوطرف این نابرابری را در $\frac{x+y}{۲}$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{x+y}{۲}\right)^{k+۱}\leqslant\frac{x^k+y^k}{۲}\cdot\frac{x+y}{۲}$$

و برای این‌که، نابرابری مورد نظر، به‌ازای $n=k+۱$ برقرار باشد، کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{x^k+y^k}{۲}\cdot\frac{x+y}{۲}\leqslant\frac{x^{k+۱}+y^{k+۱}}{۲}$$

ولی نابرابری اخیر، به‌سادگی، به‌نابرابری روشن زیر تبدیل می‌شود:

$$(x^k-y^k)(x-y)>۰$$

۳۸. با فرض $f_۱(x)=x$، برای $n\in\mathbf{N}$ و $n>۱$ تعریف می‌کنیم:

$$f_{n+۱}(x)=f_n(x)\left(f_n(x)+\frac{۱}{n}\right)$$

که اگر آن را با دنبالهٔ مورد نظر مسألـه مقایسه کنیم، به‌معنای $f_n(x)=x_n$ است درواقع، اگر $x_۱=f_۱(x)=x$ بگیریم، داریم:

$$x_2=f_2(x)=f_1(x)\left(f_1(x)+\frac{1}{n}\right)=x\left(x+\frac{1}{n}\right)=x^2+\frac{1}{n}x;$$

$$x_3=f_3(x)=\left(x^2+\frac{1}{n}x\right)\left(x^2+\frac{1}{n}x+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\left(x^2+\frac{1}{n}x\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{n}x\right);\quad \ldots$$

درضمن، تابع $f_n(x)$، دارای این ویژگی‌هاست:

۱) یك چندجمله‌ای از درجهٔ 2^{n-1} است، که مقدار ثابت ندارد؛

۲) ضریب‌هـای همهٔ جمله‌های آن مثبت و، بنابراین، برای $x \geqslant 0$، تابعی صعودی است وجهت تحدب آن به‌سمت yهای منفی است؛

۳) $f_n(0)=0$ و $f_n(1)\geqslant 1$.

درجست وجوی مقداری از x ($x=f_1(x)=x_1$) هستیم کـه، برای آن داشته باشیم: $0<x_n<x_{n+1}<1$، شرط $x_{n+1}>x_n$ به‌این صورت درمی‌آید:

$$x_{n+1}-x_n=x_n\left(x_n+\frac{1}{n}\right)-x_n=x_n\left(x_n+\frac{1}{n}-1\right)>0\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_n>1-\frac{1}{n}$$

به‌این ترتیب، باید ثابت‌کنیم که، مقدارمنحصر به‌فردی برای t وجود دارد، به نحوی‌که، به‌ازای هرمقدار n، داشته باشیم:

$$1-\frac{1}{n}<f_n(t)<1 \qquad (1)$$

(که درضمن، مثبت بودن $f_n(t)$ هم تأمین می‌شود).

تابع $f_n(t)$، برای $0\leqslant t\leqslant 1$، پیوسته وصعودی است ومقدارهای از صفر تا عددی بزرگتر ازواحد را می‌پذیرد. دوعدد a_n و b_n را طوری درنظر می‌گیریم که داشته باشیم:

$$a_n<b_n \ , \quad f_n(a_n)=1-\frac{1}{n} \quad , \quad f_n(b_n)=1$$

روشن است که a_n و b_n منحصر به‌فردند؛ درضمن داریم:

$$f_{n+1}(a_n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right]=1-\frac{1}{n};$$

$$f_{n+1}(a_{n+1})=1-\frac{1}{n+1}$$

یعنی $a_n<a_{n+1}$. به‌همین ترتیب، چون $f_{n+1}(b_n)=1+\frac{1}{n}$ و $f_{n+1}(b_{n+1})=1$، پس $b_n>b_{n+1}$. به‌این ترتیب

$$a_n<a_{n+1}<b_{n+1}<b_n$$

اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$ فرض کنیم، روشن است که $a_n\leqslant b_n$. ثابت می‌کنیم $a=b$؛ f_n تابعی است محدب وچون $f_n(0)=0$ و $f_n(b_n)=1$، به ازای $0\leqslant x\leqslant b_n$ داریم: $f_n(x)\leqslant\frac{x}{b_n}$،

یعنی $1-\frac{1}{n}\leqslant\frac{a_n}{b_n}$. $F_n(a_n)=1-\frac{1}{n}\leqslant\frac{a_n}{b_n}$ ازنا برابری $1-\frac{1}{n}\leqslant\frac{a_n}{b_n}$ نتیجه می‌شود

$b_n-a_n\leqslant\frac{b_n}{n}$ وچون $b_n\leqslant 1$ پس $b_n-a_n<\frac{1}{n}$، یعنی $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

وبنا براین $a=b$.

دنبالهٔ $\{a_n\}$ صعودی و دنبالهٔ $\{b_n\}$ نزولی است وهردو به‌سمت عدد منحصر به‌فرد a (یا b) میل می‌کنند وعدد $x_1=a$ همان عددی است که در جست وجوی آن بودیم.

۳۹. اگر n عددی زوج باشد ($n=2k$)، به‌ترتیب داریم:

$$(a+b)^2(a^n+b^n)^2=(a^{n+1}+b^{n+1}+ab^n+a^nb)^2\leqslant$$

$$(a^{n+1}+b^{n+1})^2(a^2+b^2)^2(a^{n-1}+b^{n-1})^2<(a^{n+1}+b^{n+1})^2$$

. . . .

$$(a^k+b^k)^2(a^{n+1-k}+b^{n+1-k})^2<(a^{n+1}+b^{n+1})^2$$

$$\cdots\cdots$$

تعداد این نابرابری‌ها، برابر $\frac{n}{2}$ است وازضرب آن‌ها به دست می‌آید:

$$\prod_{m=1}^{n}(a^m+b^m)^2<(a^{n+1}+b^{n+1})^{2\times\frac{n}{2}}=(a^{n+1}+b^{n+1})^n$$

درحالت فرد بودن $n\,(n=2k+1)$ هم، می‌توان به‌همین ترتیب عمل کرد. در این حالت $\frac{n-1}{2}$ نابرابری، شبیه نابرابری‌های بالا و، به جز آن، نابرابری

$$\left(a^{\frac{n+1}{2}}+b^{\frac{n+1}{2}}\right)^2<a^{n+1}+b^{n+1}$$

به‌دست می‌آید که از ضرب آن‌ها در یکدیگر، به همان نابرابری مورد نظر می‌رسیم.

۴۰. الف) $a=1/00000000004$ و $b=1/00000000002$ می‌گیریم. باید ببینیم، از دو عدد $\frac{1+a}{1+a+a^2}$ و $\frac{1+b}{1+b+b^2}$ کدام بزرگترند $(a>b)$. داریم:

$$\frac{1+a}{a^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\quad<\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta}=\frac{1+\beta}{\beta^2}\Longrightarrow\frac{a^2}{1+a}>\frac{b^2}{1+b};$$

$$\frac{1+a+a^2}{1+a}=1+\frac{a^2}{1+a}>1+\frac{b^2}{1+b}=\frac{1+b+b^2}{1+b}$$

وبنابراین $\frac{1+a}{1+a+a^2}<\frac{1+b}{1+b+b^2}$، یعنی $A<B$.

ب) روشن است که

$$\frac{1}{A}=1+\frac{a^n}{1+a+\dots+a^{n-1}}=1+\frac{1}{\frac{1}{a^n}+\frac{1}{a^{n-1}}+\dots+\frac{1}{a}};$$

$$\frac{1}{B}=1+\frac{1}{\frac{1}{b^n}+\frac{1}{b^{n-1}}+\dots+\frac{1}{b}}$$

چون $a>b$، پس $\frac{1}{a^k}<\frac{1}{b^k}$ و $\frac{1}{A}>\frac{1}{B}$، یعنی $A<B$.

۴۱. به‌سادگی معلوم می‌شود که $\frac{1}{4k^2-1}=\frac{k}{2k+1}-\frac{k-1}{2k-1}$. در ضمن، برای $k>1$ داریم $3k^2<4k^2-1$، یعنی $\frac{1}{3k^2}>\frac{1}{4k^2-1}$.

اکنون در نابرابری

$$\frac{1}{3k^2}>\frac{k}{2k+1}-\frac{k-1}{2k-1}$$

به‌ترتیب، عددهای از ۱ تا n را قرار می‌دهیم و نابرابری حاصل را با هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\right)>\frac{n}{2n+1}$$

و یا $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}>\frac{3n}{2n+1}$.

۴۲. تابع $f(x)=2\sin x+tg\, x-3x$، تابعی صعودی است، زیرا

$$f'(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3=\frac{2\cos^3 x-3\cos^2 x+1}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{(\cos x-1)^2(2\cos x+1)}{\cos^2 x}\geqslant 0$$

(زیرا برای $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ داریم $2\cos x+1>0$). بنابراین، اگر

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$، آن‌وقت

$$f(\alpha) > f(0) \Longrightarrow 2\sin\alpha + tg\alpha - 3\alpha > 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2\sin\alpha + tg\alpha > 3\alpha$$

۴۳. چهارضلعی را $ABCD$ می‌نامیم و فرض می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a},\ \overrightarrow{BC} = \mathbf{b},\ \overrightarrow{CD} = \mathbf{c},\ \overrightarrow{DA} = \mathbf{d};$$
$$|\overrightarrow{AB}| = a,\ |\overrightarrow{BC}| = b,\ |\overrightarrow{CD}| = c,\ |\overrightarrow{DA}| = d$$

بنابر قاعدهٔ جمع بردارها داریم:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = -\mathbf{d}$$
$$\mathbf{d}^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

که از آن‌جا به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$3(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) = d^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{c})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{c})^2$$

یعنی $3(a^2 + b^2 + c^2) > d^2$ و $a^2 + b^2 + c^2 > \frac{1}{3}d^2$.

۴۴. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $\hat{C} = 90^\circ$. این برابری‌ها روشن‌اند:

$$|CD|\cdot|AB| = |AC|\cdot|BC|\ ;\ \ |AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

اکنون، به‌ترتیب داریم:

$$(|CD| + |AB|)^2 = |CD|^2 + 2|CD|\cdot|AB| + |AB|^2 =$$
$$= |CD|^2 + 2|AC|\cdot|BC| + |AC|^2 + |BC|^2 =$$
$$= |CD|^2 + (|AC| + |BC|)^2 > (|AC| + |BC|)^2$$

و بنابراین $|CD| + |AB| > |AC| + |BC|$.

اکنون فرض می‌کنیم $\hat{C} > 90^\circ$. خط راست l را از نقطهٔ C، عمود بر (BC) رسم می‌کنیم. چون زاویهٔ C از ۹۰ درجه بزرگتر است، خط راست

l، پاره خط راست AB را در نقطه‌ای مثل F قطع می کند. بنا بر آن چه در مورد مثلث FBC داریم:

$$|CD|+|FB|<|BC|+|CF|$$

درضمن درمثلث AFC داریم:

$$|AC|-|FC|<|AF|$$

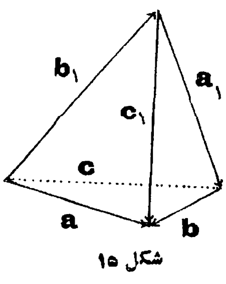
ازمجموع این دونا برابری، به‌نا برابری موردنظر می‌رسیم.

۴۵. با توجه به شرطهای $\alpha+\beta<\pi$ و $\alpha>0$ و $\beta>0$، می‌توان نتیجه گرفت که شرط $\alpha<\beta$، به‌معنای $\sin\alpha<\sin\beta$ است. این حکم، برای $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ روشن است. در حالت $\beta>\frac{\pi}{2}$، می‌توان نوشت $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi-\alpha$. درحالت $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$، تابع $y=\sin x$ نزولی است و چون $\beta<\pi-\alpha$، پس $\sin\beta>\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$. عکس این حکم هم درست است وباشرطهای $\alpha+\beta<\pi$، $\alpha>0$، $\beta>0$، $\sin\alpha<\sin\beta$، به‌سادگی نتیجه می‌شود $\alpha<\beta$ (مثلا، با برهان خلف).

اکنون به اثبات حکم تمرین می‌پردازیم. بنابرفرض، α و β مثبت‌اند و، در ضمن، $\alpha<\beta$ و $\alpha+\beta<\pi$، بنابراین $0<\sin\alpha<\sin\beta$ و $0<\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<1$، به‌این ترتیب:

$$\frac{\sin a}{\sin b}\leqslant\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<1 \iff \frac{\sin a}{\sin a}<1 \iff a<b$$

(درواقع، چون $0<b<\pi$، داریم $\sin b>0$).



شکل ۱۵

۴۶. بردارهای a، a_1، b، b_1، c و c_1 رادرنظرمی‌گیریم (شکل ۱۵)، بنا به قانون جمع بردارها داریم:

$$b_1+a_1+b+(-a)=0$$

$$b_1+c_1+(-b)+c=0،$$

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{c}_1)+\mathbf{a}_1+\mathbf{c}=0$$

که آن‌ها را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$\mathbf{a}-\mathbf{a}_1=\mathbf{b}+\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{b}-\mathbf{b}_1=\mathbf{c}+\mathbf{c}_1, \quad \mathbf{c}-\mathbf{c}_1=-\mathbf{a}-\mathbf{a}_1$$

هریك ازاین‌سه برابری رامجذور و، سپس، مجموع دوبرابری حاصل ازاولی وسومی را ازبرابری حاصل ازدومی‌کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(\mathbf{a}-\mathbf{a}_1)^2+(\mathbf{c}-\mathbf{c}_1)^2-(\mathbf{b}-\mathbf{b}_1)^2=$$
$$=(\mathbf{b}+\mathbf{b}_1)^2+(\mathbf{a}+\mathbf{a}_1)^2-(\mathbf{c}-\mathbf{c}_1)^2$$

باتوجه به‌این‌که مجذور اسکالر یك‌بردار، برابراست بامجذورطول‌آن، نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{c}^2+\mathbf{c}_1^2-(\mathbf{b}^2+\mathbf{b}_1^2)=2\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}_1$$

از طرف دیگر $2\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}_1=2aa_1\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{a}_1})<a\cdot a_1\leqslant\mathbf{a}^2+\mathbf{a}_1^2$.
بنابراین

$$(c^2+c_1^2)-(b^2+b_1^2)<a^2+a_1^2 \Longleftrightarrow a^2+a_1^2+b^2+b_1^2>c^2+c_1^2$$

۴۷. از نابرابری $(a-b)^2\geqslant 0$ به دست می‌آید $a^2+b^2\geqslant 2ab$، بااستفاده ازنابرابری اخیرداریم:

$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}\geqslant 2\sqrt{\frac{xy}{\sqrt{xy}}}=2\sqrt[4]{xy}$$

وچون، بنابرمعادلهٔ اول دستگاه $\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}=xy$، بنابراین

$$xy\geqslant 2\sqrt[4]{xy}\Longleftrightarrow\sqrt[4]{x^3y^3}\geqslant 2 \Longleftrightarrow xy\geqslant\sqrt[3]{16} \qquad (*)$$

به‌همین ترتیب، بااستفاده ازهمان نابرابری $a^2+b^2\geqslant 2ab$ داریم:

$$x^\alpha+y^\alpha\geqslant 2\sqrt{x^\alpha y^\alpha}=2\sqrt{(xy)^\alpha}$$

وچون، بنا به‌معادلهٔ دوم دستگاه $x^\alpha+y^\alpha=8(xy)^{\frac{\alpha-3}{2}}$، به‌دست می‌آید:

$$\text{(**)}\qquad 8(xy)^{\frac{\alpha-3}{2}} \geqslant 2\sqrt{(xy)^{\alpha}} \Longleftrightarrow xy \leqslant \sqrt[3]{16}$$

به‌این ترتیب، از (*) و (**) نتیجه‌می‌شود: $xy=\sqrt[3]{16}$؛ وچون علامت برابری در نابرابری $a^2+b^2 \geqslant 2ab$، تنها در حالت $a=b$ پیش می‌آید، باید داشته باشیم:

$$x=y=\sqrt[3]{4}$$

آزمایش نشان می‌دهدکه، این‌جواب، درمعادله‌های دستگاه صدق می‌کند.

۴۸. باتوجه به‌مثبت بودن a و b داریم:

$$(a+b)(a-b)^2=(a+b)[(a^2-ab+b^2)-ab]=$$

$$=a^3+b^3-ab(a+b) \geqslant 0$$

یعنی $a^3+b^3 \geqslant ab(a+b)$ (علامت برابری برای $a=b$) و

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} \leqslant \frac{1}{ab(a+b)+abc}=\frac{1}{ab(a+b+c)}$$

برای هریك ازدوکسردیگرسمت چپ نابرابری هم، رابطهٔ مشابهی به دست می‌آید. درنتیجه

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}=\frac{1}{abc}$$

۴۹. راهنمایی. نابرابری‌های مثلثی را، ابتدا درمثلث‌های ABD، BCD، ABC و ACD و، سپس، در مثلث‌های ABO، BCO، CDO و DAO بنویسید (O، محل برخورد قطرهای چهارضلعی است).

۵۰. به‌ترتیب داریم:

$$a^4+b^4=\frac{1}{2}(a^2+b^2)^2+\frac{1}{2}(a^2-b^2)^2 \geqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(a-b)^2\right]^2 \geqslant \frac{1}{8}(a+b)^4 > \frac{1}{8}\times 16 = 2$$

۵۱. داریم:

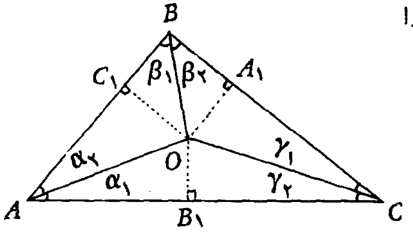
$$(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})^n = a+b+\dots > a+b > c = (\sqrt[n]{c})^n$$

یعنی $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}>\sqrt[n]{c}$. به‌همین ترتیب ثابت می‌شود:

$$\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}>\sqrt[n]{a}،\ \sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{c}>\sqrt[n]{b}$$

بنابراین، $\sqrt[n]{a}$، $\sqrt[n]{b}$ و $\sqrt[n]{c}$ می‌توانند طول ضلع‌های یک مثلث باشند.

۵۲. این نام گذاری‌ها را می‌پذیریم (شکل ۱۶):



شکل ۱۶

$$\widehat{OAC}=\alpha_1،\ \widehat{OAB}=\alpha_2،$$

$$\widehat{OBA}=\beta_1،\ \widehat{OBC}=\beta_2،$$

$$\widehat{OCB}=\gamma_1،\ \widehat{OCA}=\gamma_2،$$

$$\alpha_1+\alpha_2=\alpha،\ \beta_1+\beta_2=\beta،\ \gamma_1+\gamma_2=\gamma$$

اگر عمود OA_1 را بر ضلع BC وارد کنیم، در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OA_1B و OCA_1 داریم:

$$|CA_1|=|OC|\cos\gamma_1،\ |BA_1|=|OB|\cos\beta_2$$

که از مجموع آن‌ها به‌دست می‌آید $a=|BC|=|OC|\cos\gamma_1+|OB|\cos\beta_2$.

به‌همین ترتیب

$$b=|OC|\cos\gamma_2+|OA|\cos\alpha_1،\ c=|OA|\cos\alpha_2+|OB|\cos\beta_1$$

بنابراین

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=|OA|(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)+$$

$$+|OB|(\cos\beta_1+\cos\beta_2)+|OC|(\cos\gamma_1+\cos\gamma_2)=$$

$$=|OA|\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+|OB|\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2}+$$

$$+|OC|\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}\leqslant|OA|\cos\frac{\alpha}{2}+|OB|\cos\frac{\beta}{2}+|OC|\cos\frac{\gamma}{2}$$

۵۳. تابع $y=\sin x$ را در نظر می‌گیریم و سطح بین نمودار منحنی و محور طول را در فاصلهٔ $[0, 1]$ با S نشان می‌دهیم. این فاصله را به ترتیب به ۲، ۳، ۴، ... و k بخش برابر تقسیم می‌کنیم و مستطیل‌هایی را در نظر می‌گیریم که قاعدهٔ آن‌ها در فاصلهٔ $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ و ارتفاع آن‌ها برابر $\frac{1}{k+1}$ باشد باشد (مستطیل‌های به قاعده‌های $1-\frac{1}{2}$، $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$، ...، $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ و ارتفاع‌های $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، ...، $\frac{1}{k+1}$). اگر مجموع مساحت‌های این مستطیل‌ها را S_k بنامیم، روشن است که $S_k<S$. از طرف دیگر

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\sin\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{1}{k+1}}{k(k+1)};$$

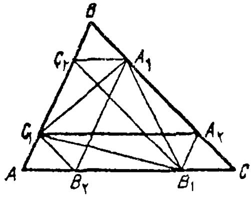
$$S_n<S=\int_0^1\sin x\,dx=1-\cos 1<\frac{1}{2}$$

(زیرا $\cos 1>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$). و سرانجام

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n+1}}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}S_n\leqslant S<\frac{1}{2}$$

۵۴. نقطه‌های C_2، B_2، و A_2 را، به ترتیب، روی ضلع‌های AB، AC و BC طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم (شکل ۱۷):

$$\frac{|AC_2|}{|C_2B|}=\frac{|BA_2|}{|A_2C|}=\frac{|CB_2|}{|B_2A|}=3$$



شکل ۱۷

اگر محیط شش ضلعی $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ را P_1 بنامیم، روشن است که $P_1=\frac{3}{4}P$ (از مثلث های متشابه استفاده کنید: مثلاً $|A_1C_2|=\frac{1}{4}|AC|$ و $|B_1B_2|=\frac{1}{2}|AC|$). در ضمن، با توجه به نابرابری‌های مثلثی $p<P_1$، بنابراین $p<\frac{3}{4}P$.

برای اثبات نابرابری سمت چپ، یعنی $p>\frac{1}{2}P$، پاره‌خط‌های راست A_1B_2، B_1C_2 و C_1A_2 را رسم می‌کنیم. باتوجه به عکس قضیهٔ تالس به‌دست می‌آید:

$$(A_1B_2)||(AB),\ (C_1A_2)||(AC),\ (B_1C_2)||(BC)$$

از آن جا: $\frac{|A_1B_2|}{|AB|}=\frac{|C_1A_2|}{|AC|}=\frac{|B_1C_2|}{|BC|}=\frac{3}{4}$، درضمن باتوجه به‌نابرابری‌ها درمثلث‌ها

$$|A_1C_1|+|C_1B_2|>|A_1B_2|,\ |C_1B_1|+|B_1A_2|>|C_1A_2|,$$
$$|A_1B_1|+|A_1C_2|>|B_1C_2|$$

که ازمجموع آن‌ها به‌دست می‌آید: $p+\frac{1}{4}P>\frac{3}{4}P$ یا $p>\frac{1}{2}P$.

۵۵. روشن است که $x>y>0$. از معادلهٔ فرض نتیجه می‌شود: $\frac{x^3+y^3}{x-y}=1$. اکنون، به روشنی داریم:

$$x^2+y^2<x^2+xy+y^2=\frac{x^3-y^3}{x-y}<\frac{x^3+y^3}{x-y}<1$$

۵۶. اگر $f(x)=a\cos x+b\cos 3x-1$ بگیریم، چون $f(x)>0$ جواب ندارد، همیشه داریم $f(x)\leqslant 0$. بنابراین

$$f(\pi)=-a-b-۱\leqslant ۰ \Longleftrightarrow -a-b\leqslant ۱$$

$$۲f\left(\frac{\pi}{۳}\right)=a-۲b-۲\leqslant ۰ \Longleftrightarrow a-۲b\leqslant ۲$$

ازمجموع دونابرابری اخیر به‌دست می‌آید: $-۳b\leqslant ۳$، یعنی $-b\leqslant ۱$.
ازطرف دیگرداریم:

$$f(۲\pi)=a+b-۱\leqslant ۰ \Longleftrightarrow a+b\leqslant ۱$$

$$۲f\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)=-a+۲b-۲\leqslant ۰ \Longleftrightarrow -a+۲b\leqslant ۲$$

که ازمجموع آن‌ها به‌دست می‌آید: $۳b\leqslant ۳$ و $b\leqslant ۱$. به‌این ترتیب، باتوجه به دونابرابری $-b\leqslant ۱$ و $b\leqslant ۱$ داریم: $|b|\leqslant ۱$.

۵۷. روشن است که اگر $tg x_۱$ مقداری مثبت باشد، $tg x_۲$ وسپس $tg x_۳$ و غیره هم مثبت می‌شوند. برای دو عدد مثبت a و b همیشه داریم $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲\geqslant ۰$ یا $\frac{a+b}{۲}\geqslant\sqrt{ab}$ (علامت برابری، برای $a=b$).

بنابراین

$$\frac{tg x_n+۳cotg x_n}{۲}\geqslant\sqrt{tg x_n\cdot ۳cotg x_n}=\sqrt{۳}$$

ولی، بنابرمعادلهٔ آخردستگاه $tg x_۱=\frac{tg x_n+۳cotg x_n}{۲}$، بنابراین

$$tg x_۱\geqslant\sqrt{۳} \Longleftrightarrow tg^۲ x_۱\geqslant ۳ \Longleftrightarrow tg x_۱\geqslant ۳cotg x_۱$$

اکنون، باتوجه به‌معادلهٔ اول دستگاه داریم:

$$tg x_۲=\frac{۱}{۲}(tg x_۱+۳cotg x_۱)\geqslant\frac{۱}{۲}(tg x_۱+tg x_۱)=tg x_۱$$

واگر، به‌همین ترتیب، به‌سراغ معادله‌های دیگردستگاه برویم، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$tg x_۱\leqslant tg x_n\leqslant tg x_{n-۱}\leqslant \dots \leqslant tg x_۳\leqslant tg x_۲\leqslant tg x_۱$$

واین، تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم:

$$tg\,x_1 = tg\,x_2 = tg\,x_3 = \dots = tg\,x_n = \sqrt{3}$$

یعنی $x_i = k_i\pi + \frac{\pi}{3}$ که، در آن n ،... ،۲ ،۱ ،۰ $= i$ و $k \geqslant 0$.

به‌همین‌ترتیب، در حالت $tg\,x_1 < 0$ نتیجه می‌شود: $x'_i = k'_i\pi - \frac{\pi}{3}$
که، در آن، $k'_i \leqslant 0$ و n ،... ،۲ ،۱ ،۰ $= i$.

۵۸. در بازهٔ (۰، ۱) داریم $0 < \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$ یا $\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}$ و یا $\frac{1-\cos x}{2} < \frac{x^2}{4}$، از آن جا $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$. به‌این‌ترتیب می‌توان نوشت:

$$\int_0^1 \frac{x}{\cos x}\,dx < \int_0^1 \frac{2x}{2-x^2}\,dx = -\ln(2-x)\Big|_0^1 = \ln 2$$

۵۹. می‌دانیم:

$$p_n = 2Rn\sin\frac{\pi}{n},\quad P_n = 2Rn\,tg\,\frac{\pi}{n}$$

به‌این ترتیب

$$\frac{1}{2}(p_n + P_n) = Rn\left(\sin\frac{\pi}{n} + tg\,\frac{\pi}{n}\right) > Rn \times \frac{2\pi}{n} = 2\pi R$$

(ضمن حل تمرین ۳۰. ثابت کردیم $\sin x + tg\,x > 2x$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$، در ضمن، چون $n \geqslant 2$، پس $0 < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{6}$).

۶۰. ماشین‌های حساب معمولی، نتیجهٔ محاسبه‌ها را به تقریب می‌دهند و، بنابراین، اگر با یك رشته عمل حسابی سروکار داشته باشیم، نمی‌توانیم به‌نتیجهٔ کار اطمینان کنیم، چراکه، نتیجهٔ حاصل از اشتباه‌های ناشی از تقریب، ممکن است منجر به‌جوابی نادرست بشود. مثلا فرض کنید، بخواهیم باماشین‌حساب معمولی، نابرابری تمرین ۶۰، یعنی $e^6 > \pi^4 + \pi^5$ را مورد تحقیق

قرار دهیم. به‌دست می‌آید:

$$\pi^{۴}\approx ۹۷/۴۰۹۱،\ \pi^{۵}\approx ۳۰۶/۰۲،\ e^{۶}\approx ۴۰۳/۴۲۹،$$

$$\pi^{۴}+\pi^{۵}\approx ۴۰۳/۴۲۹۱$$

ومارا به‌نتیجهٔ نادرست $\pi^{۴}+\pi^{۵}>e^{۶}$ می‌رساند. این نتیجهٔ نادرست، ناشی ازجمع شدن خطاهای محاسبه‌است. درضمن، باچنین ماشین‌حسابی،نمی‌توانیم دقت محاسبه را ازتعداد محدودی رقم‌ها، بالاتر ببریم.

اکنون محاسبه رابا همین ماشین حساب که π و e راتا ۷ رقم می‌دهد، به طریق دیگری انجام می‌دهیم:

$$\pi^{۲}=\pi\times\pi\approx ۹/۸۶۹۶۰۴،\ \pi^{۴}=\pi^{۲}\cdot\pi^{۲}\approx ۹۷/۴۰۹۰۸۳،$$

$$\pi^{۵}=\pi^{۴}\cdot\pi\approx ۳۰۶/۰۱۹۶۵،\ \pi^{۴}+\pi^{۵}\approx ۴۰۳/۴۲۸۷۳،$$

$$e^{۲}=e\cdot e\approx ۷/۳۸۹۰۵۵۹،\ e^{۴}=e^{۲}\cdot e^{۲}\approx ۵۴/۵۹۸۱۴۷،$$

$$e^{۶}=e^{۲}\cdot e^{۴}\approx ۴۰۳/۴۲۸۷۶،\ ۰<e^{۶}-(\pi^{۴}+\pi^{۵})<$$

$$<۰/۰۰۰۰۴<۱۰^{-۴}$$

آیا به‌این نتیجه‌گیری باید قانع شد؟ آیا حداکثر مقدار n برابر ۴ است؟ نه. هنوز نمی‌دانیم، خطاهای ناشی ازمحاسبه‌های تقریبی، چه تأثیری برنتیجهٔ کار داشته‌اندا بنابراین، به این نتیجه، نمی‌توان اعتمادکرد و باید راهی مطمئن‌تر جست وجوکرد، ابتدا تلاش می‌کنیم مسألهٔ زیر را حل‌کنیم:

اگر یك ماشین حساب بتواند عمل‌های حسابی‌را تنها روی عددهای دورقمی انجام دهد، چگونه می‌توان دوعدد n رقمی را $(n>۲)$، به‌کمك‌آن درهم ضرب‌کرد؟

برای این منظور، هریك ازدوعدد را به‌صورت یك چند جمله‌ای از توان‌های ۱۰۰ می‌نویسیم. مثلا عدد ۱۳۵۷۶۹ را به‌این صورت

$$۱۳۵۷۶۹=۱۳\times ۱۰۰^{۲}+۵۷\times ۱۰۰+۶۹$$

بعد، دوعددی راکه باید درهم ضرب‌کنیم، طبق قانون ضرب چند جمله‌ای‌ها، درهم ضرب می‌کنیم، ضرب‌هارا می‌توان باماشین حسابی‌که دردسترس داریم

انجام داد. فرض کنید بخواهیم حاصل ضرب دو عــدد ۱۷۲۱ و ۲۴۱۵ را پیدا کنیم:

$$۱۷۲۱\times۲۴۱۵=(۱۷\times۱۰۰+۲۱)(۲۴\times۱۰۰+۱۵)=$$
$$=۴۰۸\times۱۰۰^{۲}+(۵۰۴+۲۵۵)\times۱۰۰+۳۱۵$$

عددهای حاصل را زیرهم می‌نویسیم و باهم جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} ۴۰۸۵۰۰۰۰ \\ ۵۰۳۰۰ \\ ۲۵۵۰۰ \\ ۳۱۵ \\ \hline ۴۱۵۶۲۱۵ \end{array}$$

اکنون برای حل مسألهٔ اصلی، عددهای تقریبی π و e را تا ۱۵ رقم بعداز ممیز درنظر می‌گیریم:

$$\pi=۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳\ldots$$
$$e=۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵\ldots$$

ازمساله‌ای‌که هم‌اکنون حل‌کردیم، استفاده می‌کنیم و درهرگام، خطای حاصل را تخمین می‌زنیم. برای سادگی کار، مقدارهای تقریبی π و e را (تا ۱۵ رقم بعدازممیز)، π' و e' می‌نامیم.

چون $e=e'+\delta_۱$ ($۰<\delta_۱<۱۰^{-۱۵}$)، بنابراین

$$e^۶=(e')^۶+\delta_۲$$

و به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد کــه $۰<\delta_۲<۱۰^{-۱۲}$. e' را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$e'=۲/۷۱۸+۲/۸۱۸\times۱۰^{-۴}+۲/۸۴۵\times۱۰^{-۸}+$$
$$+۹/۰۴۵\times۱۰^{-۱۲}$$

به‌ترتیب به‌دست می‌آید:

$$(e')^۲=۷/۳۸۹۰۵۶۰۹۸۰۶۰۵+\delta_۳$$

($۰<\delta_۳<۱/۶\times۱۰^{-۱۴}$؛ ۱۳ رقم بعدازممیز دقیق است)؛

$$(e')^{۴} = ۵۴/۵۹۸۱۵۰۰۳۲۷۷۸ + \delta_{۴}$$

($0 < \delta_{۴} < ۳ \times ۱۰^{-۱۲}$؛ ۱۰ رقم بعدازممیز دقیق است)؛

$$(e')^{۶} = ۴۰۳/۴۲۸۷۹۳۴۹۲۷ + \delta_{۵}$$

($0 < \delta_{۵} < ۲ \times ۱۰^{-۱۰}$؛ ۹ رقم بعداز ممیز دقیق است)، بنابراین، مقدار $e^{۶}$ تا ۹ رقم بعداز ممیز چنین است: ۴۰۳/۴۲۸۷۹۳۴۹۲.

به همین ترتیب می‌توان، مقدار تقریبی $\pi^{۵} + \pi^{۴}$ را، تا ۹ رقم بعداز ممیز به‌دست‌آورد:

$$۴۰۳/۴۲۸۷۷۵۸۱۹$$

یعنی $0 < e^{۶} - \pi^{۵} - \pi^{۴} < ۰/۰۰۰۰۲ < ۱۰^{-۴}$ و، بنابراین، حداکثرعدد n، همان ۴ است.

برای مقایسه، نتیجهٔ محاسبهٔ باماشین‌های محاسبهٔ دقیق‌تر را می‌آوریم:

$$(e')^{۶} = ۴۰۳/۴۲۸۷۹۳۴۹۲۷۳۷۴،$$

$$(\pi')^{۵} + (\pi')^{۴} = ۴۰۳/۴۲۸۷۷۵۸۱۹۲۸۳۵$$

۶۱. طول‌های سه بعد مکعب مستطیل را a، b و c می‌نامیم و $a+b+c=m$ می‌گیریم. دراین صورت، حجم مکعب مستطیل $V=abc$ می‌شود و داریم:

$$\sqrt[۳]{V} = \sqrt[۳]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{۳} = \frac{m}{۳} \Longrightarrow V \leqslant \frac{m^{۳}}{۲۷}$$

حداکثرحجم برابر $\frac{m^{۳}}{۲۷}$ است ووقتی به دست می‌آیدکه داشته باشیم $a=b=c$، یعنی وقتی‌که بامکعب سروکار داشته باشیم.

۶۲. داریم

$$\sqrt[n+۱]{ab^{n}} = \sqrt[n+۱]{a \cdot \underbrace{bb \cdots b}_{n \text{ مرتبه}}} \leqslant \frac{a + \overbrace{b + b + \cdots + b}^{n \text{ مرتبه}}}{n+۱} = \frac{a+nb}{n+۱}$$

علامت برابری، برای $a=b$ پیش می‌آید.

این نابرابری می‌تواند تقریب اضافی برخی از ریشه‌ها را به‌ما بدهد. مثلاً

$$\sqrt[۳]{۱۲}=\sqrt[۳]{۳\times ۲^۲}\leqslant\frac{۳+۲\times ۲}{۳}\approx ۲/۳$$

و $\sqrt[۳]{۱۲}$ تا سه رقم بعداز ممیز برابر ۲/۲۸۹ است.

۶۳. به‌ترتیب داریم:

$$a_۱a_۲\cdots a_n=\sqrt[n]{a_۱^na_۲^n\cdots a_n^n}\leqslant\frac{a_۱^n+a_۲^n+\cdots+a_n^n}{n}$$

۶۴. باتوجه به‌نابرابری‌های (۷) (صفحهٔ ۶۹» داریم:

$$\sqrt{\frac{x^۲+y^۲}{۲}}\leqslant\frac{x^۳+y^۳}{x^۲+y^۲}=\frac{a}{x^۲+y^۲}$$

بامجذورکردن دو طرف این نابرابری و تبدیل‌های لازم به‌دست می‌آید:

$$(x^۲+y^۲)^۳\leqslant ۲a^۲\Longrightarrow x^۲+y^۲\leqslant\sqrt[۳]{۲a^۲}$$

حداکثر مقدار $x^۲+y^۲$ برابر $\sqrt[۳]{۲a^۲}$ است که به‌ازای $x=y=\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}$ به‌دست می‌آید.

برای پیداکردن حداکثر $x+y$، از همان نابرابری‌های (۷) استفاده می‌کنیم:

$$x+y\leqslant ۲\sqrt{\frac{x^۲+y^۲}{۲}}\leqslant ۲\sqrt{\frac{\sqrt[۳]{۲a^۲}}{۲}}=\sqrt[۳]{۴a}$$

حداکثر $x+y$ برابـر $\sqrt[۳]{۴a}$ است که به‌ازای $x=y=\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}$ بـه‌دسـت می‌آید.

۶۵. واسطهٔ حسابی ازواسطهٔ مربعی تجاوز نمی‌کند:

$$\frac{x+y+z}{3} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \Longrightarrow x^2+y^2+z^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(x+y+z)^2}{3} = 12$$

حداقل $x^2+y^2+z^2$ برابر ۱۲ است و برای $x=y=z=2$ به دست می‌آید.

۶۶. راهنمائی. به ازای $\alpha > 1$ داریم $C_\alpha \geqslant C_1$ و به ازای $0 < \alpha < 1$: $C_\alpha < C_1$.

۶۷. می‌دانیم $C_1 \leqslant C_3$، یعنی

$$\frac{x+y+z}{3} \leqslant \left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{81}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = 3 \Longrightarrow x+y+z \leqslant 9$$

۶۸. چون $0 < \alpha+1 < 1$، داریم (مسألهٔ ۱۶ را ببینید):

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1+\frac{\alpha+1}{n}, \quad \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1-\frac{\alpha+1}{n}$$

که اگر، این دونابرابری رادر $n^{\alpha+1}$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(n+1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1}+(\alpha+1)n^\alpha, \quad (n-1)^{\alpha+1} < n^{\alpha-1}-(\alpha+1)n^\alpha$$

واز آن‌ها، نابرابری‌های مطلوب نتیجه می‌شود.

۶۹. باتوجه به مسألهٔ ۱۶ وشرط $\alpha > 1$ داریم:

$$(1+t)^\alpha \geqslant 1+\alpha t, \quad t \geqslant -1$$

(علامت برابری، تنها برای $t=0$). اگر $y = t+1$ بگیریم، نابرابری بالا به‌این صورت درمی‌آید:

$$y^\alpha \geqslant 1+\alpha(y-1) \Longrightarrow y^\alpha - \alpha y \geqslant 1-\alpha \quad (y \geqslant 0)$$

(برابری تنها برای $y=1$). m را عددی مثبت می‌گیریم و دو طرف نابرابری اخیررا در m^α ضرب می‌کنیم، چنین می‌شود:

$$(my)^\alpha - \alpha m^{\alpha-1}(my) \geqslant (1-\alpha)m^\alpha, \quad y \geqslant 0$$

اکنون اگر $x=my$ و $m=\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$ بگیریم (یعنی $a=\alpha m^{\alpha-۱}$) نتیجه می‌شود:

$$x^{\alpha}-ax\geqslant(۱-\alpha)m^{\alpha}=(۱-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-۱}}$$

(برابری، برای $y=۱$ یا $x=m$، یعنی $x=\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$).

به‌این ترتیب، باشرطهای $\alpha>۱$، $x\geqslant ۰$ و $a>۱$، تابع

$$f(x)=x^{\alpha}-ax$$

درنقطهٔ $x=\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$ به حداقل‌مقدارخودمی‌رسد واین حداقل برابراست با

$$(۱-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-۱}}$$

مثلا درحالت خاص $\alpha=۲$، حداقل‌مقدار $x^۲-ax$درنقطهٔ $x=\frac{a}{۲}$ به‌دست می‌آیدکه برابر است با $-\frac{a^۲}{۴}$. همچنین، حداقل مقدار $x^۳-۲۷x$ در نقطهٔ $x=۳$ به‌دست می‌آید وبرابر است با -۵۴.

در ضمن روشن است‌که اگر با تابع $\varphi(x)=ax-x^{\alpha}$، با همان شرطهای $\alpha>۱$، $a>۰$ و $x\geqslant ۰$، سروکار داشته باشیم، در همان نقطهٔ $x=\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$ به حداکثر مقدار خود، یعنی $(\alpha-۱)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-۱}}$ می‌رسد.

۷۵. $\cos x=t$ می گیریم. داریم:

$$\sin x\sin ۲x=۲\sin^۲ x\cos x=۲(۱-\cos^۲ x)\cos x=۲(t-t^۳)$$

روشن است که $-1 \leqslant t \leqslant 1$. درحالت $-1 \leqslant t \leqslant 0$ مقدار

$$\sin x \sin 2x = 2t(1-t^2)$$

غیرمثبت و، بنابراین، ازمقدار مثبت $\frac{4}{9}\sqrt{3}$ کوچکتر است. در حالت $0 < t \leqslant 1$، با توجه به نتیجهٔ مسألهٔ قبل، تابع $t-t^3$ در نقطهٔ $t=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ به‌حداکثرمقدار خود می‌رسد که برابر است با

$$2t(1-t^2)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3\sqrt{3}}=\frac{4}{9}\sqrt{3}$$

یعنی درهرحال $\sin x \sin 2x \leqslant \frac{4}{9}\sqrt{3}$.

۷۱. راه‌حل شبیه راه‌حل مسألهٔ ۶۹ است. چون $\alpha<0$، بنابراین

$$(1+t)^{\alpha} \geqslant 1+\alpha t$$

(برابری تنها برای $t=0$). $y=1+t$ می‌گیریم:

$$y^{\alpha} \geqslant 1+\alpha(y-1),\quad y \geqslant 0$$

(برابری، برای $y=1$). با ضرب دو طرف نابرابری در m^{α} $(m>0)$ به‌دست می‌آید:

$$(my)^{\alpha}-\alpha m^{\alpha-1}(my) \geqslant (1-\alpha)m^{\alpha}$$

وبافرض $x=my$ و $a=-\alpha m^{\alpha-1}$

$$x^{\alpha}+ax \geqslant (1-\alpha)m^{\alpha}=(1-\alpha)\left(-\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

(برابری، برای $x=m=\left(-\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$).

مثلاً تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+27x$ $(x>0)$ در نقطهٔ $x=\frac{1}{27}$ به حداقل مقدار خود می‌رسد و این مقدار حداقل برابر ۴ می‌شود.

۷۲. راهنمائی. با فرض $y=x^{\alpha}$ به تابع $a\left(\frac{1}{a}y-y\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ می‌رسیم که، در آن، $a>0$ و $\frac{1}{\alpha}>1$ و $y\geqslant 0$؛ درنتیجه، با توجه به‌حل مسألهٔ ۶۹ قابل حل است.

پاسخ: حداکثر مقدار تابع برابراست با $(1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$.

۷۳. $\sqrt[n]{n}=1+\alpha_n$ می‌گیریم که در آن $\alpha_n>0$ و دو طرف آن را به‌توان n می‌رسانیم:

$$n=(1+\alpha_n)^n=\left[(1+\alpha_n)^{\frac{n}{2}}\right]^2$$

به‌شرط $n\geqslant 2$، یعنی $\frac{n}{2}\geqslant 1$، باتوجه به‌مسألهٔ ۱۶ داریم:

$$(1+\alpha_n)^{\frac{n}{2}}>1+\frac{n}{2}\alpha_n\ ;$$

$$n>\left(1+\frac{n}{2}\alpha_n\right)^2=1+n\alpha_n+\frac{n^2}{4}\alpha_n^2>\frac{n^2}{4}\alpha_n^2$$

از آن‌جا $\alpha_n^2<\frac{4}{n}$ و $\alpha_n<\frac{2}{\sqrt{n}}$. به‌این ترتیب

$$\sqrt[n]{n}=1+\alpha_n<1+\frac{2}{\sqrt{n}}$$

این نابرابری را، به کمک بسط دوجمله‌ای، می‌توانیم قوی‌تر کنیم. داریم:

$$\left(۱+\sqrt{\frac{۲}{n}}\right)^n=۱+n\sqrt{\frac{۲}{n}}+\frac{n(n-۱)}{۲}\cdot\frac{۲}{n}+\cdots$$

$$\cdots>۱+\frac{n(n-۱)}{۲}\cdot\frac{۲}{n}=n$$

که از آن‌جا به دست می‌آید $\sqrt[n]{n}<۱+\sqrt{\frac{۲}{n}}$.

۷۴. به‌ترتیب داریم:

$$(\sqrt{n+۱}+\sqrt{n-۱})^۲=۲n+۲\sqrt{n^۲-۱}<۲n+۲\sqrt{n^۲}=۴n$$

یعنی $\sqrt{n+۱}+\sqrt{n-۱}<۲\sqrt{n}$ و بنابراین

$$\frac{۱}{۲\sqrt{n}}<\frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n-۱}}=\frac{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n-۱}}{۲}$$

درنتیجه $\frac{۱}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+۱}-\sqrt{n-۱}$.

۷۵. درآغاز، این دستور مثلثاتی را به‌یاد می‌آوریم:

$$tg(A+B+C)=\frac{tg\,A+tg\,B+tg\,C-tg\,A\,tg\,B\,tg\,C}{۱-tg\,A\,tg\,B-tg\,B\,tg\,C-tg\,C\,tg\,A}=$$

$$=\frac{cotg\,A\,cotg\,B+cotg\,B\,cotg\,C+cotg\,C\,cotg\,A-۱}{cotg\,A\,cotg\,B\,cotg\,C-cotg\,A-cotg\,B-cotg\,C}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$A+B+C=k\pi\Longrightarrow\begin{cases}tg\,A+tg\,B+tg\,C=tg\,A\,tg\,B\,tg\,C،\\ cotg\,A\,cotg\,B+cotg\,B\,cotg\,C+cotg\,C\,cotg\,A=۱\end{cases}$$

$$A+B+C=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}cotg\,A+cotg\,B+cotg\,C=cotg\,A\,cotg\,B\,cotg\,C،\\ tg\,A\,tg\,B+tg\,B\,tg\,C+tg\,C\,tg\,A=۱\end{cases}$$

۱) چون $\alpha+\beta+\gamma=\pi$، پس
$cotg\alpha cotg\beta+cotg\beta cotg\gamma+cotg\gamma cotg\alpha=1$ و داریم:

$$tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\gamma tg\alpha=$$

$$=(tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\gamma tg\alpha)(cotg\alpha cotg\beta+cotg\beta cotg\gamma+$$

$$+cotg\gamma cotg\alpha)=(tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\gamma tg\alpha)\left(\frac{1}{tg\alpha tg\beta}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{tg\alpha tg\gamma}+\frac{1}{tg\gamma tg\alpha}\right)\geqslant 9$$

(مسألهٔ ۱۱ را ببینید).

۲) $y=cotg\alpha cotg\beta cotg\gamma$ می‌گیریم، پس

$$y^2=(cotg\alpha cotg\beta)(cotg\beta cotg\gamma)(cotg\gamma cotg\alpha)$$

مجموع این سه پرانتز برابر واحد است (زیرا $\alpha+\beta+\gamma=\pi$) و می‌دانیم: اگر مجموع سه عامل مثبت، مقداری ثابت باشد، حاصل‌ضرب آن‌هـا وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که این عامل‌ها باهم برابر باشند:

$$cotg\alpha cotg\beta=cotg\beta cotg\gamma=cotg\gamma cotg\alpha\Longrightarrow\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$$

و به‌این ترتیب، حداکثر مقدار y، به‌ازای $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$ به دست می‌آید:

$$y_{Max}=\left(cotg\frac{\pi}{3}\right)^3=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

یعنی $cotg\alpha cotg\beta cotg\gamma\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}$.

یادداشت. در استدلال بالا، زاویه‌های α، β و γ را حاده گرفتیم، ولی اگر یکی از زاویه‌ها منفرجه باشد، باز هم نابرابری ۲) درست است، زیرا مقدار سمت چپ آن منفی می‌شود و از هر مقدار مثبتی کوچکتر است.

۷۶. نابرابری قوی‌تری را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم، بـرای n

عدد مثبت a_1، a_2، ...، a_n همیشه داریم:

$$\frac{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\cdots(a_{n-1}+a_n)(a_n+a_1)}{a_1a_2\cdots a_n} \geqslant 2^n$$

نابرابری‌های زیر روشن‌اند:

$$a_1+a_2 \geqslant 2\sqrt{a_1a_2}, \quad a_2+a_3 \geqslant 2\sqrt{a_2a_3}, \ldots,$$

$$a_{n-1}+a_n \geqslant 2\sqrt{a_{n-1}a_n}, \quad a_n+a_1 \geqslant 2\sqrt{a_na_1}$$

که ازضرب آن‌ها دریکدیگر به‌دست می‌آید:

$$(a_1+a_2)(a_2+a_3)\cdots(a_{n-1}+a_n)(a_n+a_1) \geqslant 2^n a_1a_2\cdots a_n$$

ودرحالت خاص $n=3$ و $a_1=x$، $a_2=y$، $a_3=z$ داریم:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 2^3xyz \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} \geqslant 8$$

۷۷. $A=a^3+b^3+c^3-16SR+8Sr$ می‌گیریم. در ضمن می‌دانیم

$$R=\frac{abc}{4S}, \quad r=\frac{2S}{a+b+c}$$

دراین صورت به‌ترتیب داریم:

$$A=a^3+b^3+c^3-4abc+\frac{16S^2}{a+b+c}=$$

$$=a^3+b^3+c^3-4abc+(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)=$$

$$=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+3abc-9abc=$$

$$=(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc=$$

$$=abc\left[(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9\right] \geqslant 0$$

(مسألهٔ ۱۱ را ببینید). بنابراین $a^۲+b^۲+c^۲\geqslant ۸S(۲R-r)$.
علامت برابری، برای $a=b=c$، یعنی وقتی که مثلث مفروض، متساوی‌الاضلاع باشد.

۷۸. اگر همهٔ عددهای $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n هم علامت باشند، روشن است که، قدرمطلق مجموع آن‌ها، با مجموع قدرمطلق‌های آن‌ها برابر می‌شود، ولی اگر در بین عددهای a_i، بعضی مثبت و بعضی منفی باشند، قدرمطلق مجموع عددهای مثبت را A وقدرمطلق مجموع عددهای منفی‌را B می گیریم. روشن است‌که مقدارسمت چپ برابر $||A|-|B||$ ومقدارسمت راست برابر $|A|+|B|$ می‌شود، یعنی سمت چپ نابرابری ازسمت راست آن کوچکتر است.

۷۹. درتمرین ۷۵ دیدیم، برای زاویه‌های هرمثلث داریم:

$$cotg\,A\,cotg\,B\,cotg\,C\leqslant\frac{\sqrt{۳}}{۹}$$

چون A و B و C، زاویه‌هایی حاده‌اند، همهٔ تابع‌های مثلثاتی آن‌ها مثبت‌اند وبه‌دست می آید:

$$tg\,A\,tg\,B\,tg\,C\geqslant\frac{۹}{\sqrt{۳}}=۳\sqrt{۳}=(\sqrt{۳})^۳$$

اکنون، باتوجه به‌رابطهٔ بین واسطه‌های حسابی وهندسی و استفاده از مسألهٔ ۱۶ داریم:

$$tg^n A+tg^n B+tg^n C\geqslant ۳\sqrt[۳]{(tg\,A\,tg\,B\,tg\,C)^n}\geqslant ۳(\sqrt{۳})^n>$$

$$>۳\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)^n\geqslant ۳+\frac{۳n}{۲}$$

۸۰. باتوجه به‌شرط مساله،کسرها مثبت‌اند، بنابراین

$$\frac{۱}{sin\left(\frac{\pi}{۳}+\alpha\right)}+\frac{۱}{sin\left(\frac{\pi}{۳}-\alpha\right)}\geqslant ۲\sqrt{\frac{۱}{sin\left(\frac{\pi}{۳}+\alpha\right)sin\left(\frac{\pi}{۳}-\alpha\right)}}=$$

$$=2\sqrt{\frac{2}{\cos 2\alpha-\cos 120^\circ}}=2\sqrt{\frac{4}{2\cos 2\alpha+1}}\geqslant\frac{2\times 2}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

۸۱. با توجه به‌نابرابری‌های $\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}\leqslant\frac{1}{8}$ و $\cos\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$، که درهر مثلث برقرارند، داریم:

$$ab+bc+ca=2S\left(\frac{1}{\sin C}+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right)\geqslant$$

$$\geqslant 6S\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}}=$$

$$=\frac{3S}{\sqrt[3]{\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{3S}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}\times\frac{3\sqrt{3}}{8}}}=\frac{3S}{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=4S\sqrt{3}$$

۸۲. بردار $\mathbf{u}$ را بامختصات $(\sqrt{x-1}, 1)$ وبردار $\mathbf{v}$ را بامختصات $(1, \sqrt{y-1})$ درنظرمی‌گیریم:

$$\mathbf{u}=(\sqrt{x-1}, 1),\quad \mathbf{v}=(1, \sqrt{y-1})$$

بنابراین $|\mathbf{u}|=\sqrt{x}$ و $|\mathbf{v}|=\sqrt{y}$. می‌دانیم اگر دو بردار داری مختصات (x_1, y_1) و (x_2, y_2) باشند، حاصلضرب عددی (اسکالر) آن‌ها برابر $x_1x_2+y_1y_2$ می‌شود [کتاب محاسبهٔ برداری از رشته‌کتاب‌های کوچك ریاضی، شمارهٔ ۱۵، صفحهٔ ۳۹ را ببینید]، یعنی

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}$$

وچون $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\leqslant|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$، بنابراین

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\leqslant\sqrt{xy} \qquad (*)$$

اکنون با استفاده از این نابرابری به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\leqslant\sqrt{ab}+\sqrt{c-1}\leqslant\sqrt{(ab+1)c}$$

یادداشت. درستی نابرابری (*) را به طور مستقیم هم می‌توان ثابت کرد. برای سادگی بیشتر، نابرابری زیر را، که هم‌ارز نابرابری (*) است، ثابت می‌کنیم:

$$\sqrt{t}+\sqrt{z}\leqslant\sqrt{(t+1)(z+1)},\ t\geqslant 0،\ z\geqslant 0 \qquad (**)$$

با مجذور کردن دو طرف نابرابری (**)، به سادگی، به نابرابری روشن زیر می‌رسیم:

$$(\sqrt{zt}-1)^2\geqslant 0$$

و روشن است که علامت برابری برای $zt=1$ است.

۸۳. با استفاده از قضیهٔ ویت دربارهٔ رابطهٔ بین ریشه‌ها و ضریب‌های چندجمله‌ای و با توجه به نابرابری بین واسطهٔ حسابی و واسطهٔ هندسی چند عدد مثبت، داریم:

$$10=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\geqslant 5\sqrt[5]{x_1x_2x_3x_4x_5}=5\sqrt[5]{32}=10$$

چون واسطهٔ حسابی با واسطهٔ هندسی برابر شده است، باید داشته باشیم:

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=2$$

یعنی چندجمله‌ای باید به صورت $(x-2)^5$ باشد، که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$a=40،\ b=-80،\ c=80$$

۸۴. با توجه به دستورهای $2S=ah_a=bh_b=ch_c$ و با استفاده از نابرابری کوشی داریم:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{a+b+c}{2S}\geqslant\sqrt[3]{\frac{abc}{8S^3}}=\sqrt[3]{\frac{R}{2S^2}}$$

(از برابری $abc=4RS$ استفاده کردیم).

۸۵. مسأله منجر به حل معادلهٔ زیر، در مجموعهٔ عددهای درست $0<x<10$، $0<y<10$ و $0<z<10$ می‌شود:

$$100x+10y+z=xyz(x+y+z) \Longrightarrow$$
$$9(11x+y)=(x+y+z)(xyz-1)$$

دراین معادله باید: یاهریك از عددهای $x+y+z$ و $xyz-1$ بر ۳ ویا یکی‌از آن‌ها بر ۹ بخش‌پذیر باشد. درحالت اول، به‌سادگی معلوم می‌شود که باید هرسه رقم x و y و z، درتقسیم بر ۳ به باقی ماندهٔ واحد برسند، ولی دراین صورت $11x+y$ هم بر ۳ بخش پذیر و برابری ناممکن می‌شود. بنابراین، باید یکی‌از دوعدد $x+y+z$ یا $xyz-1$ بر ۹ بخش پذیر باشد، اگر $x+y+z>17$، آن‌وقت $xyz\geqslant 72$ (چرا؟) و

$$xyz(x+y+z)>1000$$

یعنی $\overline{xyz}$، نمی‌تواند عددی سه رقمی باشد. بنابراین، اگر $x+y+z$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم $x+y+z=9$ و

$$\sqrt[3]{xyz}\leqslant\frac{x+y+z}{3}=3 \Longrightarrow xyz\leqslant 27$$

وقتی $x+y+z=9$، آن وقت $xyz=11x+y$ و، بنابراین، x تنها می‌تواند برابر ۱ یا ۲ باشد، زیرا در غیراین صورت به دست می‌آید $xyz>72$. درحالت $x=2$، به‌این‌دستگاه می‌رسیم:

$$y+z=7,\quad 2yz=y+23$$

که جواب های درست ندارد. $x=1$ را آزمایش می‌کنیم. به این دستگاه می‌رسیم:

$$y+z=7,\quad 11+y=yz-1$$

این دستگاه جواب‌دارد وسرانجام به‌دوعدد ۱۳۵ و ۱۴۴ می‌رسیم‌که باشرط مسأله سازگارند.

اکنون باید به حالتی بپردازیم‌که $xyz-1$ بر ۹ بخش پذیر باشد.

اگر $xyz-1=9$، آن‌وقت با توجه به‌معادلهٔ اصلی، بـه برابری $z=10x$ می‌رسیم که ممکن نیست.

$xyz-1$ برابر ۱۸، ۳۶، ۴۵، ۵۴، ۷۲، ۸۱ یا ۹۰ هـم نمی‌تواند باشد، زیرا درهریك از این موردها، عدد xyz برابرعددی می‌شودکه عامل اولی بزرگتر از ۱۰ دارد.

برای $xyz-1=27$ به‌دستگاه زیر می‌رسیم:

$$8x=2y+3z,\quad xyz=28$$

که برای مسألهٔ ما، جواب مناسبی ندارد.

به همین ترتیب در حـالت $xyz-1=63$ هـم، جوابی بـه دست نمی‌آید.

اگر $xyx-1=9k$ $(k>10)$، آن وقت:

$$11x+y<k(x+y+z)$$

به‌این ترتیب، تنها جواب‌های مسأله، عددهای ۱۳۵ و ۱۴۴ است.

۸۶. اگر $x=\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}$ و $y=\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}}$ بگیریم نابرابری مورد نظر، به صورت $\frac{x+y}{2}\leqslant\sqrt[n]{\frac{x^n+y^n}{2}}$ درمی‌آید کـه درستی آن روشن است، زیرا برای دوعدد x، y داریم $C_1\leqslant C_n$.

نابرابری $\frac{x+y}{2}\leqslant\sqrt[n]{\frac{x^n+y^n}{2}}$ را به طـور مستقیم هم می‌تـوان ثابت کرد. باید ثابت کنیم، برای $x>0$ و $y>0$، همیشه داریم

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\leqslant\left(\frac{x^n+y^n}{2}\right)\qquad(*)$$

این نابرابری، به‌ازای $n=1$، به برابری تبدیل می‌شود ودرستی آن بر $n=2$ به‌سادگی به‌دست می‌آید: از روش استقرای ریاضی استفاده مـی کنیم و ثابت می‌کنیم، به‌فرض درستی $(*)$، داریم:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+1} \leqslant \frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{2} \qquad (**)$$

اگر دوطرف نابرابری (*) رادر $\frac{x+y}{2}$ ضرب کنیم، به‌دست‌می‌آید:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+1} \leqslant \frac{x^n+y^n}{2} \cdot \frac{x+y}{2}$$

وبنابراین، کافی است ثابت کنیم: $\frac{x^n+y^n}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \leqslant \frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{2}$
و درستی این نابرابری روشن است، زیرا به نابرابری واضح $(x^n-y^n)(x-y) \geqslant 0$ تبدیل می‌شود.

۸۷. چون $\sin^2 x \leqslant 1$ و $\cos^2 x \leqslant 1$ و $k \geqslant 1$، بنابراین

$$(\sin x)^{2k}+(\cos x)^{2k} \leqslant \sin^2 x+\cos^2 x = 1$$

برای اثبات نابرابری سمت چپ، فرض می‌کنیم $a=\sin^2 x$ و $b=\cos^2 x$ واز نابرابری $\frac{a^k+b^k}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^k$ استفاده می‌کنیم (مسألهٔ قبل را ببینید)؛ به دست می‌آید:

$$(\sin x)^{2k}+(\cos x)^{2k} \geqslant \frac{1}{2^{k-1}}$$

۸۸. فرض می‌کنیم، درظرف‌های اول ودوم، به ترتیب m کیلوگرم و n کیلوگرم نمك ومقدار آب بخارشده دراین‌ظرف‌ها، به‌ترتیب، x کیلوگرم و y کیلوگرم باشد. فرض مسأله می‌گوید:

$$\frac{m}{5-x} : \frac{m}{5} = \frac{5}{5-x} = p, \quad \frac{n}{20-y} : \frac{n}{20} = \frac{20}{20-y} = q$$

که از آن‌ها به‌دست می‌آید: $x = 5 - \frac{5}{p}$ و $y = 20 - \frac{20}{q}$. بنابراین مقدار آب بخارشده دردوظرف برابراست با

$$x+y = 25 - \left(\frac{5}{p}+\frac{20}{q}\right) \leqslant 25 - 2\sqrt{\frac{5}{p}\cdot\frac{20}{q}} =$$

$$= ۲۵ - ۲\sqrt{\frac{۱۰۰}{pq}} = ۲۵ - \frac{۲۰}{۳} = ۱۸\frac{۱}{۳}$$

به این ترتیب، حداکثر آبی که می‌تواند بخار شده باشد، برابر $۱۸\frac{۱}{۳}$ کیلوگرم است و این، به‌شرطی است که داشته باشیم $\frac{۵}{p} = \frac{۲۰}{q}$ که، با توجه به $pq = ۹$، به‌دست می‌آید: $p = \frac{۳}{۲}$ و $q = ۶$.

در نتیجه $x = ۵ - \frac{۵}{p} = \frac{۵}{۳}$ و $y = ۲۰ - \frac{۲۰}{q} = \frac{۵۰}{۳}$.

حداکثر مقدار آبی که می‌تواند بخار شود برابر $۱۸\frac{۱}{۳}$ کیلوگرم است که باید $۱\frac{۲}{۳}$ کیلوگرم آن از ظرف اول و $۱۶\frac{۲}{۳}$ کیلوگرم بقیه از ظرف دوم بخار شده باشد.

۸۹۰. ۱) به‌ترتیب داریم:

$$C_\alpha(a, b) = \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{۲}\right)^{\frac{۱}{\alpha}}$$

$$C_{-\alpha}(a, b) = \left(\frac{a^{-\alpha} + b^{-\alpha}}{۲}\right)^{-\frac{۱}{\alpha}} = \left(\frac{۲}{\frac{۱}{a^\alpha} + \frac{۱}{b^\alpha}}\right)^{\frac{۱}{\alpha}} = ab\left(\frac{۲}{a^\alpha + b^\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha}}$$

از آن‌جا

$$C_\alpha(a, b) \cdot C_{-\alpha}(a, b) = ab = (\sqrt{ab})^۲ = C_۰^۲(a, b)$$

مثلاً، اگر واسطهٔ حسابی بین دو عدد a و b را با $A(a, b)$، واسطهٔ هندسی را با $G(a, b)$ و واسطهٔ توافقی بین آن‌ها را با $H(a, b)$ نشان دهیم، از برابری بالا به‌ازای $\alpha = ۱$ به دست می‌آید:

$$A(a, b) \cdot H(a, b) = G^۲(a, b)$$

(آزمایش کنید: به‌ازای $\alpha = \frac{۱}{۲}$، چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟).

۲) راهنمایی. تحقیق کنید $C_{-\alpha}=\dfrac{1}{C_\alpha\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b}\right)}$.

به‌این ترتیب، نسبت واسطهٔ حسابی دوعدد بر واسطهٔ حسابـی عکس آن دوعدد برابراست با حاصل‌ضرب دوعدد. همین‌گزاره رامی‌توان برای‌واسطهٔ مربعی یاواسطهٔ توافقی هم به‌کاربرد.

۰۹۵. ۱) باتوجه به مسألهٔ ۱۶ داریم

$$x^n=[1+(x-1)]^n\geqslant 1+n(x-1)=nx-n+1$$

۲) الف) به‌ترتیب داریم:

$$k(k-1)(A_k-A_{k-1})=(k-1)(a_1+a_2+\cdots+a_k)-k(a_1+$$
$$+a_2+\cdots+a_{k-1})=(k-1)a_k-(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})=$$
$$=(a_k-a_1)+(a_k-a_2)+\cdots+(a_k-a_{k-1})\geqslant 0$$

یعنی $A_{k-1}\leqslant A_k$.

ب) داریم:

$$n(a_n-A_n)=na_n-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=(a_n-a_1)+$$
$$+(a_n-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})\geqslant 0\Longrightarrow A_n\leqslant a_n$$

ج) باتوجه به آن‌چه دربخش ۱) وبخش ۲)، الف) همین مسأله ثابت کردیم، داریم:

$$\frac{A_k^k}{A_{k-1}^{k-1}}=A_{k-1}\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right)^k\geqslant A_{k-1}\left(k\cdot\frac{A_k}{A_{k-1}}-k+1\right)=$$

$$=kA_k-(k-1)A_{k-1}=a_k\Longrightarrow a_k\leqslant\frac{A_k^k}{A_{k-1}^{k-1}}$$

۳). الف) به‌ترتیب داریم:

$$\left(\frac{G_k}{G_{k-1}}\right)^{k(k-1)}=\frac{(a_1a_2\cdots a_k)^{k-1}}{(a_1a_2\cdots a_{k-1})^k}=\frac{a_k^{k-1}}{a_1a_2\cdots a_{k-1}}=$$

$$=\frac{a_k}{a_1}\cdot\frac{a_k}{a_2}\cdots\frac{a_k}{a_{k-1}}\geqslant 1\Longrightarrow G_{k-1}\leqslant G_k$$

ب) داریم:

$$\left(\frac{a_n}{G_n}\right)^n=\frac{a_n^n}{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{a_n}{a_1}\cdot\frac{a_n}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqslant 1$$

از آن‌جا $G_n\leqslant a_n$.

ج) با توجه به‌آن چه هم‌اکنون ثابت کردیم، یعنی $1\leqslant\frac{G_k}{G_{k-1}}$ [بخش ۳)، الف) ازهمین مسأله]، و با توجه به‌نابرابری بخش۱) همین مسأله، داریم:

$$a_k=\frac{a_1a_2\cdots a_k}{a_1a_2\cdots a_{k-1}}=\frac{G_k^k}{G_{k-1}^{k-1}}=G_{k-1}\left(\frac{G_k}{G_{k-1}}\right)^k\geqslant$$

$$\geqslant G_{k-1}\left(k\cdot\frac{G_k}{G_{k-1}}-k+1\right)=kG_k-(k-1)G_{k-1}$$

یعنی $a_k\geqslant kG_k-(k-1)G_{k-1}$.

یادداشت. این نابرابری را، با روش دیگری هم می‌توان ثابت کرد. داریم:

$$G_{k-1}^{k-1}=a_1a_2\cdots a_{k-1}\Longrightarrow G_k^k=G_{k-1}^{k-1}\cdot a_k$$

یعنی

$$G_k=\sqrt[k]{G_{k-1}\cdot G_{k-1}\cdots G_{k-1}\cdot a_k}\leqslant\frac{(k-1)G_{k-1}+a_k}{k}$$

از آن جا $a_k\geqslant kG_k-(k-1)G_{k-1}$.

۴) چون $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_n}=1$، بنابراین می‌توان فرض کرد:

$$\frac{1}{r_1}=\frac{m_1}{m_1+m_2+\cdots+m_n},\ \frac{1}{r_2}=\frac{m_2}{m_1+m_2+\cdots+m_n},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \frac{1}{r_n}=\frac{m_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

که در آن‌ها، m_1، m_2، ...، m_n، عددهایی طبیعی‌اند. اکنون، با توجه به نابرابری $A_n \geqslant G_n$ به‌ترتیب داریم:

$$\frac{a_1^{r_1}}{r_1}+\frac{a_2^{r_2}}{r_2}+\dots+\frac{a_n^{r_n}}{r_n}=\frac{m_1a_1^{r_1}+m_2a_2^{r_2}+\dots+m_na_n^{r_n}}{m_1+m_2+\dots+m_n}=$$

$$=\frac{1}{m_1+m_2+\dots+m_n}\Big(\underbrace{a_1^{r_1}+a_1^{r_1}+\dots+a_1^{r_1}}_{m_1 \text{ مرتبه}}+$$

$$+\underbrace{a_2^{r_2}+a_2^{r_2}+\dots+a_2^{r_2}}_{m_2 \text{ مرتبه}}+\dots+\underbrace{a_n^{r_n}+a_n^{r_n}+\dots+a_n^{r_n}}_{m_n \text{ مرتبه}}\geqslant$$

$$\geqslant\left(a_1^{m_1r_1}\cdot a_2^{m_2r_2}\dots a_n^{m_nr_n}\right)^{\frac{1}{m_1+\dots+m_n}}=a_1a_2\dots a_n$$

در تبدیل آخر، از این برابری‌ها استفاده کردیم:

$$m_1+m_2+\dots+m_n=m_1r_1=m_2r_2=\dots=m_nr_n$$

این نابرابری را، می‌توان به صورتی کوتاه، این‌طور نشان داد:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{r_i}}{r_i}\geqslant\prod_{i=1}^{n}a_i,\ \left(a_i\geqslant 0,\ r_i>1,\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}=1\right)$$

علامت برابری، برای $a_1^{r_1}=a_2^{r_2}=\dots=a_n^{r_n}$، پیش می‌آید.

یادآوری می‌کنیم که، این نابرابری، می‌تواند به عنوان مبنائی برای اثبات بسیاری از نابرابری‌های مهم (مثل نابرابری‌های هولدر، کوشی و مینکووسکی) مورد استفاده قرار گیرد.

۹۱. طول و عرض مستطیل کف استخر را x و y و عمق استخر را z می‌گیریم. اگر مجموع مساحت دیواره‌ها و کف استخر را S بنامیم، داریم:

$$S=xy+2xz+2yz\geqslant 3\sqrt[3]{(xy)(2xz)(2yz)}=3\sqrt[3]{4x^2y^2z^2}=$$

$$=3\sqrt[3]{4(xyz)^2}=3\sqrt[3]{4V^2}$$

حداقل مقدار S برابر است با $3\sqrt[3]{4V^2}$ و وقتی برابر این مقدار است که داشته

باشیم:

$$xy=2xz=2yz \Longrightarrow x=y=2z=\sqrt[3]{2V}$$

یعنی استخر باید درکف خود مربع شکل باشد و، درضمن، عمقی برابر نصف ضلع کف داشته باشد، تاهزینهٔ رنگ‌کردن آن، به حداقل برسد.

۰۹۲ می‌دانیم واسطهٔ مربعی دو عدد، از واسطهٔ حسابی آن‌ها کوچکتر نیست، یعنی

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geqslant \frac{x+y}{2} \Longrightarrow x^2+y^2 \geqslant \frac{(x+y)^2}{2}$$

اگر به‌دوطرف این نابرابری، مقدار z^2 را اضافه‌کنیم وسپس از نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی دوعدد استفاده‌کنیم، به دست می‌آید:

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{(x+y)^2}{2}+z^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{(x+y)^2z^2}{2}}=$$

$$=\sqrt{2}(x+y)z \qquad (*)$$

اکنون، اگرطول وعرض و ارتفاع مکعب مستطیل را، به ترتیب، x و y و z ومساحت سطح جانبی‌آن را S بنامیم، خواهیم داشت:

$$S=2(x+y)z \text{ و } d^2=x^2+y^2+z^2$$

وباتوجه به نابرابری (*)، یعنی $\sqrt{2}(x+y)z \leqslant x^2+y^2+z^2$، به دست می‌آید:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}S \leqslant d^2 \Longrightarrow S \leqslant \sqrt{2}d^2$$

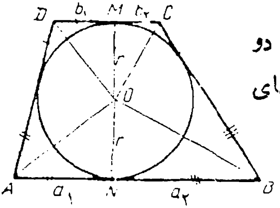
علامت برابری وقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم:

$$y=x \text{ و } \frac{(x+y)^2}{2}=z^2 \Longrightarrow x=y \text{ و } z=x\sqrt{2}$$

یعنی وقتی‌که قاعدهٔ مکعب مستطیل ومقطع قطری‌آن، مربع باشند.

۰۹۳ نقطه‌های M و N، نقطه‌های تماس دو قاعدهٔ ذوزنقهٔ $ABCD$ با دایره، قاعده‌ها رابه‌پاره‌خط‌های راستی به‌طول‌های a_1، a_2 و b_1، b_2 تقسیم

می‌کنند (شکل ۱۸)، به نحوی که $a_1+a_2=a$ و $b_1+b_2=b$.



شکل ۱۸

دو مثلث AON و ODM و همچنین، دو مثلث BON و COM باهم متشابه‌اند (زاویه‌های DOA و BOC قائمه‌اند)، بنابراین

$$\frac{r}{a_1}=\frac{b_1}{r} \quad و \quad \frac{r}{a_2}=\frac{b_2}{r}$$

یعنی $r=\sqrt{a_1b_1}=\sqrt{a_2b_2}$ و $2r=\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}$ و با توجه به قضیهٔ ۳ فصل سوم (نابرابری (۳)):

$$2r=\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}\leqslant\sqrt{(a_1+a_2)(b_1+b_2)}=\sqrt{ab}$$

درضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$، یعنی وقتی که ذوزنقهٔ مفروض، متساوی‌الساقین باشد.

۹۴. ابتدا به یاد می‌آوریم که با توجه به نابرابری (۲) از فصل سوم (قضیهٔ ۲)، برای عددهای مثبت a_1، a_2، a_3 و b_1، b_2، b_3، همیشه داریم:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\sqrt{a_3^2+b_3^2}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{(a_1+a_2+a_3)^2+(b_1+b_2+b_3)^2} \qquad (*)$$

اکنون به حل مسأله می‌پردازیم.

فاصله‌های جهت‌دار از نقطهٔ H تا خطهای راست AC، AB و BC را، به‌ترتیب، x، y و z می‌نامیم (اگر نقطه‌های H و A دریك طرف خط راست BC باشند $z>0$ ودرغیراین صورت $z<0$). طول ضلع‌های مثلث ABC، نصف محیط ومساحت آن را، به ترتیب، a، b، c، p و S می‌نامیم. درنتیجه، نقطهٔ H درهروضعی باشد (نسبت به‌مثلث ABC)، داریم:

$$2S=ax+by+cz \qquad (**)$$

سطح جانبی چهاروجهی را S_1 و $h=|DH|$ می‌گیریم، با توجه به -

نابرابری (*) و برابری (**) داریم:

$$۲S_۱ = a\sqrt{h^۲+x^۲}+b\sqrt{h^۲+y^۲}+c\sqrt{h^۲+z^۲}=$$

$$=\sqrt{a^۲h^۲+a^۲x^۲}+\sqrt{b^۲h^۲+b^۲y^۲}+\sqrt{c^۲h^۲+c^۲z^۲}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{(ah+bh+ch)^۲+(ax+by+cz)^۲}=\sqrt{۴p^۲h^۲+۴S^۲}$$

از آن جا $S_۱\geqslant\sqrt{p^۲h^۲+S^۲}$.

علامت برابری وقتی به‌دست‌می‌آید که داشته باشیم $z=y=x$، یعنی وقتی‌که پای ارتفاع DH بر مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC منطبق باشد.

۹۵. نقطهٔ برخورد خط راست AB را باخط راست d، با M نشان می‌دهیم. طول پاره‌خط‌های راست $|MA|$ و $|MB|$، مقدارهایی ثابت‌اند: $|MA|=a$ و $|MB|=b$.

فرض می‌کنیم دایره‌ای‌که از دونقطهٔ A و B می‌گذرد، خط راست d را درنقطه‌های C و D قطع کند. می‌خواهیم طول وتر CD، حداقل‌مقدارممکن باشد. داریم:

$$|CD|=|MC|+|MD|\geqslant ۲\sqrt{|MC|\cdot|MD|}=$$

$$=۲\sqrt{|MA|\cdot|MB|}\geqslant ۲\sqrt{ab}$$

حداقل‌طول وتر CD برابر $۲\sqrt{ab}$ می‌شود ووقتی‌به‌این‌حداقل‌می‌رسد که داشته باشیم:

$$|MC|=|MD|=\sqrt{ab}$$

برای رسم دایره، کافی است ازنقطهٔ M (محل برخورد خط راست AB با d) روی‌خط راست d به‌اندازهٔ $\sqrt{ba}$ جداکنیم، تا نقطهٔ C به دست آید؛ دایره‌ای‌که از سه نقطهٔ A، B و C می‌گذارد، دایرهٔ مطلوب است.

۹۶. مرکز بیضی را منطبق‌بر مبداء مختصات، قطر بزرگتر آن رامنطبق برمحور $x'x$ می‌گیریم. دراین صورت، معادلهٔ بیضی چنین می‌شود:

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱ \qquad (*)$$

که در آن، a و b، نیم قطرهای بزرگتر و کوچکتر بیضی‌اند وقتی که یك مستطیل در بیضی محاط باشد، محورهائی موازی با محورهای بیضی خواهد داشت؛ بنابراین اگر مختصات رأسی از مستطیل که در ربع اول دستگاه محورهای مختصات قرار دارد (x, y) باشد، S، یعنی مساحت مستطیل برابر $۴xy$ می‌شود: $S=۴xy$.

اکنون، می‌توان نوشت:

$$۱=\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}\geqslant ۲\sqrt{\frac{x^۲}{a^۲}\cdot\frac{y^۲}{b^۲}}=\frac{۲xy}{ab}=\frac{S}{۲ab}$$

از آن جا $S\leqslant ۲ab$. حداکثر مساحت مستطیل محاط در بیضی باقطرهای $۲a$ و $۲b$، برابر $۲ab$ ووقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ که، با توجه به معادلهٔ بیضی، یعنی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$، به‌دست می‌آید: $x=\frac{a}{\sqrt{۲}}$، $y=\frac{b}{\sqrt{۲}}$.

۹۷. محیط مستطیل مفروض را $۲p$ وطول یك ضلع آن را x می‌گیریم (ضلع دوم: $p-x$). اگر مساحت شکل حاصل را S بنامیم، داریم:

$$S=x(p-x)+\frac{\pi}{۴}x^۲+\frac{\pi}{۴}(p-x)^۲$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$x^۲-px+\frac{p^۲\pi-۴S}{۲(\pi-۲)}=۰ \qquad (*)$$

شرط وجود ریشه‌های حقیقی، برای این معادله چنین است

$$p^۲-\frac{۲(p^۲\pi-۴S)}{\pi-۲}\geqslant ۰\Longrightarrow S\geqslant\frac{۱}{۸}p^۲(\pi+۲)$$

حداقل مقدار S، برابر $\frac{۱}{۸}p^۲(\pi+۲)$ است ووقتی به این مقدار می‌رسد که

معادلهٔ (*)، دارای ریشهٔ مضاعف باشد، یعنی $x=\frac{p}{۲}$. برای این که مساحت شکل حاصل به حداقل خود برسد، باید مستطیل مفروض به‌شکل مربع باشد.

۹۸. D را یکی‌از نقطه‌های واقع برپاره خط راست BC می‌گیریم. روشن است که: ۱) درمثلث با دوزاویهٔ حاده B و C، حداقل طول AD وقتی است که D، بر نقطهٔ H، پای ارتفاع AH منطبق باشد؛ وحداکثر طول AD وقتی است که، به‌شرط $|AC|>|AB|$، نقطهٔ D بر نقطهٔ B قرار گیرد؛ ۲) اگر زاویهٔ C منفرجه یاقائمه باشد، حداقل طول AD درحالت انطباق D بر C وحداکثر آن درحالت انطباق D بر B پیش می‌آید:

اکنون، اگر D را واقع برضلع BC فرض کنیم و BB' و CC' را برخط راست AD عمود کنیم (B' و C'، روی خط راست AD)، روشن است که

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}|AD|\cdot|BB'|+\frac{۱}{۲}|AD|\cdot|CC'|$$

یعنی $\frac{۲S_{ABC}}{|AD|}=|CC'|+|BB'|$. بنابراین، مجموع فاصله‌های از B و C تاخط راست AD وقتی به‌حداقل خود می‌رسد که $|AD|$ حداکثر باشد، و وقتی به‌حداکثرخود می‌رسد که $|AD|$ حداقل باشد که، باتوجه‌به‌آن‌چه دربارهٔ حداقل وحداکثرطول $[AD]$ گفتیم، می‌توان جواب مسأله را درهمهٔ حالت‌ها پیدا کرد.

۹۹. فرض می‌کنیم $x=|AB|$ و $y=|AC|$. دراین‌صورت، درمثلث ABC داریم:

$$|BC|^۲=x^۲+y^۲-۲xy\cos\alpha=(x-y)^۲+۲xy(۱-\cos\alpha)\geqslant$$

$$\geqslant ۴xy\sin^۲\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{۲}xy\sin\alpha\times ۴tg\frac{\alpha}{۲}=۴S\,tg\,\frac{\alpha}{۲}$$

S و α مقدارهایی ثابت‌اند، بنابراین حداقل $|BC|$ وقتی به دست می‌آید که داشته باشیم: $x=y$ و، دراین‌صورت $|BC|=۲\sqrt{S\,tg\frac{\alpha}{۲}}$.

۱۰۰. ثابت می‌کنیم، هریک ازعددهای x_i را می‌توان به ۱ یا ۱ — تبدیل کرد، بدون این که، مجموع همهٔ حاصل ضرب‌های دو به‌دوی آن‌ها، بزرگ شود.

a_1 را وقتی به ۱ — تبدیل می‌کنیم که مجموع بقیهٔ ۱ — n عدد غیرمنفی باشد و وقتی به ۱ + تبدیل می‌کنیم که مجموع بقیه غیرمثبت باشد. در این صورت، حاصل $a_1(a_2+a_3+\dots+a_n)$ و، درنتیجه، مجموع همهٔ حاصل‌ضرب‌های دو به‌دو، بزرگتر نمی‌شود. همین عمل را دربارهٔ a_2، a_3، ...، a_n هم تکرار می‌کنیم. به این ترتیب، مثل این است که با عددهایی برابر ۱ یا ۱ — سروکار داریم و می‌خواهیم حداقل مجموع حاصل‌ضرب‌های دوبه‌دوی آن‌ها را پیدا کنیم.

اکنون عددهای b_1، b_2، ...، b_n را در نظر می‌گیریم، به‌نحوی که هریک از آن‌ها را بتوان برابر ۱ یا ۱ — گرفت. اگر مجموع همهٔ حاصل ضرب‌های دوبه‌دوی آن‌ها را s بنامیم، داریم:

$$s=\frac{1}{2}[(b_1+b_2+\dots+b_n)^2-(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)]$$

روشن است که

$$(b_1+b_2+\dots+b_n)^2\geqslant 0,\quad -(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)\geqslant -n$$

یعنی مجموع s نمی‌تواند از $-\frac{n}{2}$ کمتر باشد.

ولی درحالت فرد بودن n، عدد $-\frac{n}{2}$ عددی درست نیست؛ در این حالت باید $s\geqslant -\frac{n-1}{2}$ در نظر گرفت.

پاسخ. درحالت زوج بودن n، باید نیمی ازعددها را منفی و نیم دیگر را مثبت گرفت که، در این صورت $s=-\frac{n}{2}$ حداقل مقدارممکن است. در حالت فرد بودن n، باید $\frac{n+1}{2}$ عددها را مثبت و $\frac{n-1}{2}$ آن‌ها را منفی

گرفت که، در این صورت، $s=-\frac{n-1}{2}$ حداقل مقدار ممکن است.

۱۵۱. با استفاده از نابرابری ین‌سن و با توجه به مقعر بودن تابع $y=\frac{1}{\sin x}$ (وقتی x بین صفر و ۱۸۰ درجه باشد) داریم:

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\geqslant 3\times\frac{1}{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}=\frac{3}{\sin 60^\circ}=2\sqrt{3}$$

حداقل مقدار $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}$ (α، β و γ، زاویه‌های یک مثلث)، برابر است با $2\sqrt{3}$.

۱۵۲. ضمن حل تمرین ۷۵ گفتیم، به‌شرط $x+y+z=\frac{\pi}{2}$، داریم:

$$tg\,x\,tg\,y+tg\,y\,tg\,z+tg\,z\,tg\,x=1$$

α، β و γ زاویه‌های یک مثلث‌اند، یعنی $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$، بنابراین

$$tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\gamma}{2}tg\frac{\alpha}{2}=1$$

حاصل ضرب $tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}$ را p می‌نامیم. داریم:

$$P^2=\left(tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}\right)\left(tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}\right)\left(tg\frac{\gamma}{2}tg\frac{\alpha}{2}\right)$$

مجموع این سه پرانتز، مقداری است ثابت، بنابراین، حاصل ضرب آن‌ها (روشن است که هر پرانتز، مقداری‌است مثبت)، وقتی به‌حداکثر خود می‌رسد که داشته باشیم:

$$tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}=tg\frac{\gamma}{2}tg\frac{\alpha}{2}\Longrightarrow\alpha=\beta=\gamma$$

که دراین‌صورت، مقدار $tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}tg\frac{\gamma}{۲}$، برابر $\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۳}$، یعنی $\frac{\sqrt{۳}}{۹}$ می‌شود.

$$tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}tg\frac{\gamma}{۲}\leqslant\frac{\sqrt{۳}}{۹}$$

ومقدار $\frac{\sqrt{۳}}{۹}$، برای مثلث متساوی‌الاضلاع.

۱۰۳. باتوجه به‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی داریم:

$$sin\alpha\, sin\beta\leqslant\left(\frac{sin\alpha+sin\beta}{۲}\right)^{۲}=sin^{۲}\frac{\alpha+\beta}{۲}cos^{۲}\frac{\alpha-\beta}{۲}\leqslant sin^{۲}\frac{\alpha+B}{۲}$$

که علامت برابری، برای $\alpha=\beta$ پیش می‌آید. در ضمن، می‌توان تنها برای حالتی صحبت کرد که داشته باشیم $\alpha+\beta<۱۸۰^{\circ}$؛ زیرا برای $\alpha+\beta\geqslant ۱۸۰^{\circ}$، مقدار $sin(\alpha+B)$، منفی یاصفر می‌شود و نمی‌توان مقدار حداکثر رادر آن‌جا جست وجو کرد، داریم:

$$sin\alpha\, sin\beta\, sin(\alpha+\beta)\leqslant sin^{۲}\frac{\alpha+\beta}{۲}sin(\alpha+\beta)$$

اگر فرض کنیم $x=\frac{\alpha+\beta}{۲}$، باید حداکثر مقدار $sin^{۲}x\,sin۲x$ را، با شرط $۰^{\circ}<x<۹۰^{\circ}$، پیدا کنیم. می‌نویسیم:

$$(sin^{۲}x\,sin۲x)^{۲}=(۲sin^{۳}x\,cos\,x)^{۲}=۴\,sin^{۶}x\,cos^{۲}x=$$

$$=\frac{۴}{۳}(sin^{۲}x)(sin^{۲}x)(sin^{۲}x)(۳-۳sin^{۲}x)$$

باچهارعامل مثبت سروکار داریم که مجموعی ثابت دارند، بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها، وقتی به‌حداکثرمقدارخود می‌رسد که داشته باشیم:

$$sin^{۲}x=۳-۳sin^{۲}x\Longrightarrow x=۶۰^{\circ}$$

حداکثرمقدار $sin\alpha\, sin\beta sin(\alpha+\beta)$ (که‌همان‌حداکثرمقدار $sin^{۲}x\,sin۲x$ است)، به ازای $x=۶۰^{\circ}$ به دست می‌آید، به‌این ترتیب، با شرط

$0^\circ < \alpha$ و $\beta < 180^\circ$، داریم:

$$\sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha+\beta) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

که به‌ازای $\alpha=\beta=60^\circ$ به‌دست می‌آید.

۱۰۴. اگر AB را قاعدهٔ مثلث ABC بگیریم، برای این‌که مساحت مثلث ABC به‌حداکثرمقدار خود برسد، با توجه به ثابت بودن طول AB باید طول ارتفاع وارد از C بر AB، بزرگترین مقدارممکن باشد و این، در صورتی است که نقطهٔ C، وسط کمان بزرگتر AB قرارگیرد.

برای محیط مثلث ABC، طول ضلع‌های روبه‌رو به‌رأس‌های A، B و C را به‌ترتیب a، b و c و زاویه‌های این رأس‌ها را α، β و γ می‌گیریم، داریم

$$2p = 2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$

(p نصف محیط و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است). R و γ مقدارهایی ثابت‌اند، بنابراین، حداکثرمحیط همراه با حداکثر $\sin\alpha + \sin\beta$ است و می‌دانیم:

$$\sin\alpha + \sin\beta \leqslant 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

که علامت برابری، برای $\alpha=\beta$ است. حداکثر محیط هم، وقتی به دست می‌آید که نقطهٔ C، وسط کمان بزرگتر AB باشد.

۱۰۵. حالت خاص قضیهٔ ۲ (فصل سوم)، برای دوعدد مثبت a_1 و ... حاکی است که:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geqslant \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

(مسألهٔ ۶ فصل اول راهم ببینید)؛ علامت برابری، برای $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$.

با توجه به‌این نابرابری داریم:

$$y=\sqrt{x^2+(\sqrt{a})^2}+\sqrt{(c-x)^2+(\sqrt{b})^2} \geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{(x+c-x)^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

حداکثرمقدار y، برابر $\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$ است ووقتی به‌این مقدار می‌رسدکه داشته باشیم:

$$\frac{x}{\sqrt{a}}=\frac{c-x}{\sqrt{b}}\Longrightarrow x=\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

۱۰۶. برای پیداکردن حداقل y_1، ازهمان نابرابری (*) تمرین قبل استفاده می‌کنیم:

$$y_1=\sqrt{(x-m)^2+(n^2-m^2)}+\sqrt{(p-x)^2+(q^2-p^2)}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{(p-m)^2+(\sqrt{n^2-m^2}+\sqrt{q^2-p^2})^2}$$

واین مقدارحداقل، وقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم:

$$\frac{x-m}{p-x}=\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{\sqrt{q^2-p^2}}\Longrightarrow x=\frac{p\sqrt{n^2-m^2}+m\sqrt{q^2-p^2}}{\sqrt{n^2-m^2}+\sqrt{q^2-p^2}}$$

برای پیدا کردن حداکثر y_2، ازاین نابرابری استفاده می‌کنیم (که برای مقدارهای مثبت a_1، a_2، b_1، b_2 همیشه برقرار است (چرا؟)):

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}-\sqrt{a_2^2+b_2^2}\leqslant\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$$

دراین‌صورت داریم:

$$y_2=\sqrt{(x+m)^2+(n^2-m^2)}-\sqrt{(x-p)^2+(q^2-p^2)}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{(m+p)^2+(\sqrt{n^2-m^2}-\sqrt{q^2-p^2})^2}$$

واین مقدار حداکثروقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم:

$$\frac{x+m}{x-p}=\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{\sqrt{q^2-p^2}}\Longrightarrow x=\frac{m\sqrt{q^2-p^2}+p\sqrt{n^2-m^2}}{\sqrt{n^2-m^2}-\sqrt{q^2-p^2}}$$

درهردوتمرین مربوط به y_1 و y_2، می‌توان به‌جای شرط مثبت بودن m، n، p، q، $m<n$ و $p<q$، تنها شرط $|m|<|n|$ و $|p|<|q|$ رادر نظر گرفت.

۱۰۷. کافی است از نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی، برای ۱۰۰ عدد a، a، ...، a، ۱ استفاده کنیم. علامت برابری، برای $a=۱$.

۱۰۸. از نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی، ۱) دربارهٔ n عدد ۲، ۴، ...، $۲n$ و ۲) دربارهٔ n عدد ۱، ۳، ...، $۲n-۱$ استفاده کنید.

۱۰۹. راهنمائی. تابع $f(x)=\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x-a}$، برای $x>a>۰$ نزولی است (چرا؟)؛ درضمن $f(a)=۰$، بنابراین $f(x)<۰$.

۱۱۰. فرض می‌کنیم $f(x)=(۱+x)^{\alpha}+(۱-x)^{\alpha}-۲$ و $۱>x\geqslant ۰$ می‌گیریم. داریم:

$$f'(x)=\alpha(۱+x)^{\alpha-۱}+\alpha(۱-x)^{\alpha-۱}=$$

$$=\frac{\alpha}{(۱+x)^{۱-\alpha}}+\frac{\alpha}{(۱-x)^{۱-\alpha}}\geqslant ۰$$

بنابراین $f(x)$ تابعی صعودی است و چون $f(۰)=۰$، بنابراین $f(x)\geqslant ۰$.
ازطرف دیگر، $f(x)$ تابعی است زوج، پس، برای $۰\geqslant x>-۱$ داریم $f(-x)=f(x)\geqslant ۰$.

۱۱۱. به‌سادگی تحقیق می‌شود که نابرابری، برای $n=۲$ برقرار است. فرض می‌کنیم، نابرابری برای $n=k$ برقرار باشد، یعنی $\left(\frac{a+b}{۲}\right)^{k}<\frac{a^{k}+b^{k}}{۲}$. دراین صورت

$$\left(\frac{a+b}{۲}\right)^{k+۱}=\left(\frac{a+b}{۲}\right)^{k}\cdot\frac{a+b}{۲}<\frac{a^{k}+b^{k}}{۲}\cdot\frac{a+b}{۲}=$$

$$=\frac{a^{k+۱}+b^{k+۱}+ab^{k}+a^{k}b}{۴} \qquad (*)$$

ازطرف دیگر به‌سادگی ثابت می‌شود $ab^{k}+a^{k}b<a^{k+۱}+b^{k+۱}$، زیرا اگر همهٔ جمله‌ها را به‌سمت چپ علامت نابرابری منتقل کنیم، با توجه به‌شرط $a>b$، به‌نابرابری روشن $(a^{k}-b^{k})(b-a)<۰$ می‌رسیم. به این ترتیب، با توجه به $(*)$ داریم:

$$\left(\frac{a+b}{۲}\right)^{k+۱}<\frac{a^{k+۱}+b^{k+۱}+a^{k+۱}+b^{k+۱}}{۴}=\frac{a^{k+۱}+b^{k+۱}}{۲}$$

درستی نابرابری، با روش استقرای ریاضی ثابت شد.

۱۱۲. تابع $f(x)=\ln(۱+x)-x \quad (x>۰)$، تابعی نزولی است (چرا؟) و درضمن $f(۰)=۰$، بنابراین، برای $x>۰$ داریم $f(x)<۰$.

۱۱۳. اگر ازدوطرف نابرابری، درمبنای e، لگاریتم بگیریم، به این نابرابری می‌رسیم:

$$۲x<\ln(۱+x)-\ln(۱-x)$$

تابع $f(x)=۲x-\ln(۱+x)+\ln(۱-x)$ را درنظرمی‌گیریم. داریم:

$$f'(x)=۲-\frac{۱}{۱+x}-\frac{۱}{۱-x}=-\frac{۲x^۲}{۱-x^۲}<۰$$

تابع $f(x)$ نزولی‌است ودرضمن $f(۰)=۰$. بنابراین، برای $۰<x<۱$ داریم:

$$f(x)<۰ \Longrightarrow ۲x<\ln\frac{۱+x}{۱-x} \Longrightarrow e^{۲x}<\frac{۱+x}{۱-x}$$

۱۱۴. $f(x)=۱+\frac{x}{۲}-\frac{x^۲}{۸}-\sqrt{۱+x}$ می‌گیریم. داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۲\sqrt{۱+x}}=\frac{(۲-x)\sqrt{۱+x}-۲}{۴\sqrt{۱+x}}$$

صورت این‌کسر، برای $x>۰$ همیشه منفی است، زیرا به‌ازای $x\geqslant ۲$، صورت‌کسر منفی می‌شود و برای $x<۲$ می‌توان ثابت کرد $(۲-x)\sqrt{۱+x}<۲$. درواقع، درحالت $x<۲$ می‌توان دوطرف را مجذور کرد که، بعد ازساده‌کردن، به‌نابرابری $x-۳<۰$ می‌رسد که درست است.

چون $f'(x)<۰$، پس $f(x)$ برای $x>۰$ نزولی است ودرضمن $f(۰)=۰$، پس برای $x>۰$ داریم $f(x)<۰$، یعنی

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}$$

نابرابری سمت راست هم، باهمین روش وبا سادگی بیشتری، ثابت می‌شود.
مثلاً اگر $x=0/02$ بگیریم، باتوجه به‌این‌نابرابری به‌دست می‌آید:

$$1/00995<\sqrt{1/02}<1/01$$

۱۱۵. درواقع، باید برای $x>0$ ثابت‌کنیم $e^x>1+x$. تابع

$$f(x)=e^x-x-1 \quad , \quad (f'(x)=e^x-1)$$

صعودی است ودرضمن $f(0)=0$، پس $f(x)>0$.

۱۱۶. راهنمایی. تابع $f(x)=tgx-x-\frac{x^3}{3}$، برای $0<x<\frac{\pi}{2}$ صعودی است.

۱۱۷. نابرابری‌سمت‌چپ را،ضمن‌حل مثال مربوط به‌کاربرد انتگرال ثابت‌کردیم. برای اثبات نابرابری سمت راست، ازنابرابری $\cos x<1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$، که درهمان مثال ثابت‌کردیم، استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^x \cos t dt \leqslant \int_0^x \left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}\right) dt$$

که ازآن‌جا بـه‌دست می‌آید: $\sin x \leqslant x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$. علامت برابری برای $x=0$ است وبنابراین، برای $x>0$:

$$\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

۱۱۸. دشوارنیست.

۱۱۹. درمثال ۲ از § ۱ فصل چهارم ثابت‌کردیم. برای $x \geqslant 0$:

$$arctg x \geqslant x-\frac{x^3}{3}$$

درضمن می‌دانیم $\sin x \leqslant x$ $(x \geqslant 0)$. بنابراین

$$\int_0^1 \frac{arctg\, x}{\sin x}dx > \int_0^1 \frac{x-\frac{x^3}{3}}{x}dx = \int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3}\right)dx = \frac{8}{9}$$

۱۲۵. n جملهٔ اول این رشته را x_n می‌نامیم:

$$x_n = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\dots+\frac{1}{n^\alpha}$$

و ثابت می‌کنیم: x_n، برای هر مقدار دلخواه n، همیشه از مقدار ثابتی کوچکتر است، دراین‌صورت، از آن‌جاکه x_n، با بزرگ شدن n، بزرگ می‌شود، به‌معنای آن‌است‌که x_n، بامیل x به سمت بی‌نهایت، به سمت حدی میل می‌کند. فرض می‌کنیم:

$$z_{2n} = 1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\dots+\frac{1}{(2n-1)^\alpha}-\frac{1}{(2n)^\alpha}$$

روشن است‌که $z_{2n}<1$، زیرا

$$z_{2n} = 1-\left(\frac{1}{2^\alpha}-\frac{1}{3^\alpha}\right)-\left(\frac{1}{4^\alpha}-\frac{1}{5^\alpha}\right)-\dots$$
$$\dots-\left(\frac{1}{(2n-2)^\alpha}-\frac{1}{(2n-1)^\alpha}\right)-\frac{1}{(2n)^\alpha}$$

(عدد داخل هر پرانتز، مثبت است). z_{2n} را می‌توان این‌طور نوشت:

$$z_{2n} = \left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\dots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right)-2\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right) = \left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\dots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right)-\frac{2}{2^\alpha}\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\dots+\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

به‌این ترتیب $z_{2n}=x_{2n}-\frac{2}{2^\alpha}x_n$. چون $x_{2n}>x_n$ و $z_{2n}<1$، داریم:

$$1 > z_{2n} > x_n - \frac{3}{2^\alpha} x_n = \frac{2^\alpha - 2}{2^\alpha} x_n \Longrightarrow x_n < \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2}$$

یعنی x_n، به‌ازای $\alpha > 1$، مقداری است محدود و از $\frac{2}{2^\alpha - 2}$ تجاوز

نمی‌کند. مثلاً، برای $\alpha = 2$، داریم: $\frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2} = 2$، یعنی

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) \leqslant 2$$

ثابت می‌کنند، حد x_n، برای $\alpha = 2$، برابر است با $\frac{\pi^2}{6}$.

۱۲۱. تابع $f(x) = \ln(1 + x) - \frac{2x}{x + 2}$ را در بازهٔ $[0, +\infty)$ درنظر می‌گیریم. روشن که، برای مقدارهای واقع دردرون این بازه، داریم:

$$f'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)} > 0$$

و بنابراین، تابع f، در بازهٔ $(0, \infty)$ صعودی است. f تابعی است پیوسته، درنتیجه، حداقل مقدارخود رادرانتهای چپ این بازه به‌دست می‌آورد، یعنی به ازای $x = 0$. به زبان دیگر، برای هرمقدار $x \geqslant 0$، نابرابری $f(x) \geqslant f(0) = 0$ برقراراست.

یادداشت. دربرنامهٔ کنونی دبیرستانی، دربارهٔ تابع‌های لگاریتمی و ویژگی‌های آن‌ها بحث نشده‌است. دراین‌مسأله، به‌مشتق تابع $y = \ln(1 + x)$ احتیاج داشتیم. مشتق این تابع، $y' = \frac{1}{1 + x}$ و، به طور کلی، مشتق تابع $y = \ln u$ به‌صورت $y' = \frac{u'}{u}$ است که ما بدون اثبات، از آن استفاده کردیم.

همچنین، در برنامهٔ دبیرستانی، دانش‌آموزان با بررسی دقیق تابع‌ها در یك بازهٔ بسته، یعنی نقش تابع‌های پیوسته (حتی تابع‌هایی که ازیك طرف، پیوستگی دارند) آشنا نمی‌شوند. بدون مراجعه به‌ویژگی‌های تابع‌های پیوسته

حتی نمی‌توان ازاین استدلال ساده استفاده کرد که: یك تابع پیوسته ویکنوا (یعنی تابعی که تنها صعودی یا تنها نزولی است) دریك بازهٔ باز، دردوانتهای بازه به‌اکسترمم‌های خود می‌رسد. ولی توجه دقیق به این ویژگی‌های دقیق منطقی وفرورفتن در ریزه‌کاری‌های استدلالی، به خصوص دردورهٔ دبیرستانی ازنظر آموزشی مناسب نیست. دراین موردها کافی است، رفتار تابع را به‌صورت عینی وبامراجعه به‌نمودار آن درنظر بگیریم وازبررسی صوری رفتار تابع صرف نظر کنیم. درغیراین صورت، دانش‌آموز، دربحث‌های فرمولی وصوری منطقی گم می‌شود وخلاقیت خودرا ازدست می‌دهد. برای دانش‌آموز دبیرستانی، تصور شهودی دربازهٔ مفهوم پیوستگی کافی است و براساس آن می‌تواند کارخودرا ادامه دهد. لزومی نداردکه دانش‌آموز، برای درك مفهوم دقیق پیوستگی، به سراغ «ریاضیات عالی» برود؛ عمل و نیازهای شخصی، همراه بااندکی معرفت شهودی، همهٔ آن چه را که لازم است، دراختیار او می‌گذارد.

ازاین گذشته، دربررسی این مسأله، وبسیاری از مسأله‌های مشابه آن، می‌توان این دشواری را به‌نحوی برطرف کرد وبه‌استدلال کامل ودقیق رسید. برای‌این منظور، بایدتابع f رادربازهٔ بازی درنظرگرفت که شامل ۰ باشد، مثلا دربازهٔ $(-1, +\infty)$. در این صورت، نقطهٔ ۰، یك نقطهٔ درونی این بازه می‌شود، وچون تابع f، دراین بازهٔ گسترده‌ترهم صعودی‌است، بنابراین نابرابری $f(x)>f(0)$، به‌طور مستقیم، ازصعودی بودن تابع دراین بازهٔ باز، نتیجه می‌شود. باوجود این، ازآن جاکه دربعضی موردها، نمی‌توانیم دامنه یاحوزهٔ تعریف تابع راگسترش دهیم، باید دقت رادرهمان حد شهودی وعینی آن، پذیرفت.

۱۲۲. تابع $f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$ رادرنظر می‌گیریم. دراین صورت

$$f'(x)=e^x-1-x;\ f''(x)=e^x-1.$$

ازآن‌جاکه دربازهٔ $(0, +\infty)$ داریم $f''(x)=e^x-1>0$، بنابراین تابع $f'(x)$ دراین بازه صعودی است و، درنتیجه، باتکیه برپیوستگی تابع

$f'(x)$ دراین بازه، باید داشته باشیم: $f'(x)>f'(0)=0$؛ ولی دراین صورت، در بازهٔ $(0,\infty)$، تابع $f(x)$ صعودی است، به نحوی که $f(x)>f(0)=0$.

یادداشت. دراین مسأله هم، از قانونی استفاده کرده‌ایم که در برنامهٔ دبیرستانی نیامده است: مشتق تابع $y=e^x$ عبارت است از $y'=e^x$. تابع $f(x)=e^{x+a}$ (a، عددی ثابت است)، تنها تابعی‌است که مشتق آن باخودش برابر می‌شود. به‌طورکلی، برای تابع $f(x)=e^u$ (u تابعی‌از x است) داریم $f'(x)=u'\cdot e^u$.

درضمن دراین مسأله، ازمشتق دوم هم استفاده کردیم. گاهی ممکن‌است برای اثبات درستی نابرابری، به‌مشتق‌های مرتبهٔ بالاترهم نیاز داشته باشیم، مثلا برای اثبات درستی نابرابری‌های

$$e^x\geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120};$$

$$x-\frac{x^3}{6}\leqslant \sin x\leqslant x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\quad (x\geqslant 0);$$

$$1-\frac{x^2}{2}\leqslant \cos x\leqslant 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

درمسألهٔ ۱۲۲، اگر نابرابری را ساده‌تر می‌گرفتیم و می‌خواستیم درستی‌نابرابری $e^x>1+x$ رابرای $x\geqslant 0$ ثابت‌کنیم، تنها به مشتق اول نیاز داشتیم.

جالب‌است‌که ازنابرابری $e^x>1+x$ می‌توان برای‌اثبات‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی استفاده‌کرد.

این نابرابری راباتبدیل x به $x-1$، به‌صورت $e^{x-1}\geqslant x$ می‌نویسیم و ثابت می‌کنیم، برای هر $x\in\mathbf{R}$ برقرار است. اگر فرض کنیم $f(x)=e^{x-1}-x$، آن‌وقت به‌دست می‌آید: $f'(x)=e^{x-1}-1$ که برای $x<1$ منفی و برای $x>1$ مثبت‌است، یعنی $f(x)$، درنقطهٔ $x=1$ به‌می‌نیمم خود می‌رسد و برای هرمقدار $x\in\mathbf{R}$ داریم $f(x)\geqslant f(1)=0$.

اکنون n عدد مثبت x_1، x_2، ...، x_n را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=A$$

اگر در نابرابری $x \leqslant e^{x-1}$، به جای x، به‌ترتیب، عددهای مثبت $\frac{x_1}{A}$، $\frac{x_2}{A}$، ...، $\frac{x_n}{A}$ قرار دهیم، به این نابرابری‌ها می‌رسیم:

$$e^{\frac{x_1}{A}-1}\geqslant\frac{x_1}{A}$$

$$e^{\frac{x_2}{A}-1}\geqslant\frac{x_2}{A}$$

$$\cdots\cdots$$

$$e^{\frac{x_n}{A}-1}\geqslant\frac{x^n}{A}$$

که از ضرب آن‌ها در یکدیگر، نتیجه می‌شود:

$$e^{\frac{x_1+x_2+\cdots+_n}{A}-n}\geqslant\frac{x_1\cdot x_2\cdots x_n}{A^n}$$

ولی $n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{A}$ و، بنابراین، نابرابری اخیر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{x_1x_2\cdots x_n}{A^n}\leqslant 1\Longrightarrow\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

۱۲۳. تابع $f(x)=2x+3-\ln(x^3+9)$ و دامنهٔ آن

$$D(f)=(-\sqrt[3]{9},+\infty)$$

را در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که

$$f'(x)=۲-\frac{۳x^۲}{x^۳+۹}=\frac{۲x^۳-۳x^۲+۱۸}{x^۳+۹}$$

وازآن‌جاکه $x^۳+۹$ در بازهٔ $(-\sqrt[۳]{۹},+\infty)$ مثبت است، به‌شرطی $f'(x)$ مثبت است‌که $۲x^۳-۳x^۲+۱۸$ مثبت باشد. اگر فرض کنیم:

$$g(x)=۲x^۳-۳x^۲+۱۸ \qquad (x\in D(f))$$

به‌دست می‌آید $g'(x)=۶x^۲-۶x$ که به‌ازای $x>۱$ مثبت‌است؛ پس تابع $f'(x)$ برای $x>۱$ صعودی و چون $f'(۱)=۱/۷$، بنابراین به‌ازای $x>۱$ داریم $f'(x)>۱$، یعنی $f(x)$ برای $x>۱$ صعودی است وچون

$$f(۱)=۵-\ln ۱۰>۰$$

درنتیجه، به‌ازای $x>۱$ داریم $f(x)>۰$ و

$$۲x+۳>\ln(x^۳+۹)$$

به‌این ترتیب، نابرابری $۲n+۳<\ln(n^۳+۹)$، برای $n\geqslant ۱$ برقرار نیست. دربازهٔ $(-\sqrt[۳]{۹},۱)$ تنها سه‌عدد درست باقی‌می‌ماند: ۰، ۱ — و ۲ —. باآزمایش معلوم می‌شودکه تنها $n=-۱$ و $n=-۲$ درنابرابری‌مفروض صدق می‌کند.

۱۲۴. $f(x)=۳x-tg\,x$ را دربازهٔ $\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)$ درنظر می‌گیریم. داریم:

$$f'(x)=۳-\frac{۱}{cos^۲x}\ ,\ f'(x)=۰ \Longrightarrow x=arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

(جواب $f'(x)=۰$ را تنها دربازهٔ موردنظر بـه دست آوردیم). داریم:

$$۰<x<arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}} \Longrightarrow f'(x)>۰$$

$$arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}<x<\frac{\pi}{۲} \Longrightarrow f'(x)<۰$$

یعنی $f(x)$، درنقطهٔ $x=arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ به‌ماکزیمم خود می‌رسد. ثابت می‌کنیم،

این حداکثر مقدار تـابع، از $\frac{۷}{۴}=۱/۷۵$ کمتر است. $\alpha=\arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

می‌گیریم، یعنی $\cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$، پس $\sin\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$ و $tg\alpha=\sqrt{۲}$؛ در ضمن $\sqrt{۲}>۱/۴۱$. ازطرف دیگر

$$\alpha=\arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}<\arccos\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۳}<۱/۰۵$$

به‌نحوی که

$$f(\alpha)=۳\alpha-tg\alpha<۳/۱۵-۱/۴۱<۱/۷۵$$

به‌این‌ترتیب، نامعادلهٔ مفروض، در بازهٔ $\left[۰،\frac{\pi}{۲}\right]$، جواب ندارد.

۱۰۱۲۵) تابع $f(x)=\sqrt[۳]{۱+x}+\sqrt[۳]{۱-x}$ را در بازهٔ $(-۱،۱)$ درنظر می‌گیریم. داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(۱+x)^۲}}-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}}$$

$f'(x)$ به‌ازای $x=۰$ برابر صفر، بـه‌ازای $x<۰$ مثبت و به‌ازای $x>۰$ منفی‌است. بنابراین، تابع $f(x)$ در بازهٔ $(-۱،۱)$، در نقطهٔ $x=۰$، بیشترین مقدار را دارد و داریم:

$$f\left(\frac{\sqrt[۳]{۳}}{۳}\right)=\sqrt[۳]{۱+\frac{\sqrt[۳]{۳}}{۳}}+\sqrt[۳]{۱-\frac{\sqrt[۳]{۳}}{۳}}<f(۰)=۲$$

که اگر، دوطرف آن را در $\sqrt[۳]{۳}$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[۳]{۳+\sqrt[۳]{۳}}+\sqrt[۳]{۳-\sqrt[۳]{۳}}<۲\sqrt[۳]{۳}$$

۲) تابع $f(x)=\log_x(x+۱)$ را در بازهٔ $(۱،+\infty)$ درنظر می‌گیریم. داریم:

$$f(x)=\frac{\ln(x+۱)}{\ln x};$$

$$f'(x)=\frac{\frac{\ln x}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x}}{\ln^2 x}=\frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}$$

برای $x>1$ داریم: $x+1>x>0$ ، یعنی $0<\ln x<\ln(x+1)$،
از این جا

$$x\ln x<(x+1)\ln(x+1)$$

یعنی، برای $x>1$، نابرابری $f'(x)<0$ برقرار و $f(x)$ نزولی‌است، به این ترتیب، $f(4)>f(5)$ و $\log_4 5>\log_5 6$.

یادداشت. ضمن حل این مسأله، ثابت‌کردیم

$$x\ln x<(x+1)\ln(x+1)$$

این‌اثبات‌را می‌توانستیم به‌کمك مشتق‌تابع $g(x)=x\ln x$ بدهیم. درواقع

$$g'(x)=\ln x+\frac{1}{x}\cdot x=\ln x+1>0\ \ (x>1)$$

بنابراین تابع $g(x)$، برای $x>1$، صعودی است، یعنی $g(x)<g(x+1)$ و

$$x\ln x<(x+1)\ln(x+1)$$

خود نابرابری $\log_4 5>\log_5 6$ را هم، می‌توانستیم، به‌صورتی زیباتر و بدون استفاده ازمشتق ثابت‌کنیم. با توجه به‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی داریم:

$$\sqrt{\log_5 4\cdot\log_5 6}<\frac{\log_5 4+\log_5 6}{2}=\frac{\log_5 24}{2}<1\ ;$$

از آن‌جا

$$\log_5 4\cdot\log_5 6<1\Longrightarrow\log_5 6<\frac{1}{\log_5 4}=\log_4 5$$

۳) تابع‌های $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ و $g(x)=\ln f(x)=\frac{\ln x}{x}$ را درنظر

می‌گیریم. روشن است که تابع g در هر مجموعه‌ای صعودی (یا نزولی) باشد، تابع f هم در همان مجموعه صعودی (یا نزولی) است و برعکس. داریم:

$$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^{2}}$$

که به ازای $x>e$ منفی است. پس تابع g، و در نتیجه تابع f، برای $x>e$ نزولی است، یعنی

$$f(1000)>f(1001)\Longrightarrow 1000^{\frac{1}{1000}}>1001^{\frac{1}{1001}}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1000^{1001}>1001^{1000}$$

۴) تابع $f(x)=x+\cos x$ را در نظر می‌گیریم. مشتق آن $f'(x)=1-\sin x$ غیرمنفی و، بنابراین، تابع f غیرنزولی است. درواقع، نمودار تابع $f(x)$ در نقطه‌هایی که ریشهٔ معادلهٔ $\sin x=1$، یعنی در نقطه‌های $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$، از نقطه‌های عطف خود می‌گذرد (نقطه‌هایی که مماس در آن‌ها بر نمودار، موازی با محور طول است) و، درنتیجه، برای $x\in\mathbf{R}$ صعودی است؛ یعنی

$$f(1370)<f(1371)\Longrightarrow 1370+\cos 1370<1371+\cos 1371$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $\cos 1370<1+\cos 1371$.

یادداشت. نابرابری $\cos 1370<1+\cos 1371$ را، با روش ساده‌تری هم می‌توانستیم ثابت کنیم. می‌دانیم، برای $0<x<\frac{\pi}{2}$ داریم $\sin x<x$ ومثلاً $\sin\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$. اکنون، با استفاده از همین نابرابری، می‌توان نوشت:

$$|\cos 1370-\cos 1371|=\left|2\sin\frac{1}{2}\sin\frac{2741}{2}\right|=$$

$$=2\left|\sin\frac{1}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{2741}{2}\right|<1$$

۵) تابع $f(x)=\frac{tg\,x}{x}$ را در بازهٔ $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ درنظر می‌گیریم. داریم:

$$f'(x)=\frac{x}{\cos^2 x}-tg\,x=\frac{x-\sin x\cos x}{\cos^2 x}=\frac{2x-\sin 2x}{2\cos^2 x}>0$$

زیرا برای $2x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ داریم $2x>\sin 2x$. بنابراین $f(x)$ در بازهٔ $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ صعودی است و می‌توان نوشت:

$$\frac{tg\frac{5\pi}{180}}{\frac{5\pi}{180}}<\frac{tg\frac{6\pi}{180}}{\frac{6\pi}{180}}\Longrightarrow 6tg5^\circ<5tg6^\circ\ ;$$

$$\frac{tg\frac{9\pi}{180}}{\frac{9\pi}{180}}<\frac{tg\frac{10\pi}{180}}{\frac{10\pi}{180}}\Longrightarrow 10tg9^\circ<9tg10^\circ$$

و از ضرب این دو نابرابری در یکدیگر، به‌دست می‌آید:

$$60tg5^\circ\,tg9^\circ<45tg6^\circ\,tg10^\circ\Longrightarrow 4tg5^\circ\,tg9^\circ<3tg6^\circ\,tg10^\circ$$

۶) تابع $f(x)=\sin^3(x+\alpha)-\sin^3 x$ را در بازهٔ $(0,5\alpha)$ و با فرض $\alpha=\frac{\pi}{180}$ درنظر می‌گیریم. دراین صورت داریم:

$$f'(x)=3\sin^2(x+\alpha)\cos(x+\alpha)-3\sin^2 x\cos x$$

اکنون تابع $g(x)=\sin^2 x\cos x$ را در بازهٔ $(0,5\alpha)$ درنظر می‌گیریم:

$$g'(x)=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x=\sin x(2-3\sin^2 x)$$

چون $5\alpha<\frac{\pi}{4}$، پس در بازهٔ مورد نظر

$$2-3\sin^2 x>2-3\times\frac{1}{2}>0$$

به‌نحوی‌که $g'(x)>0$ و، بنابراین، $g(x)$ تابعی صعودی است. ولی دراین صورت، در بازهٔ $(0,4\alpha)$، داریم:

$$f'(x)=۳[g(x+\alpha)-g(x)]>۰$$

درنتیجه تابع $f(x)$ در بازهٔ $(۰،۴\alpha)$ صعودی است و $f(۳\alpha)>f(۲\alpha)$، یعنی

$$\sin^{۳}۴^\circ-\sin^{۳}۳^\circ>\sin^{۳}۲^\circ-\sin^{۳}۱^\circ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sin^{۳}۳^\circ+\sin^{۳}۲^\circ<\sin^{۳}۴^\circ+\sin^{۳}۱^\circ$$

یادداشت. در واقع، می‌توان این نابرابری را، با بررسی تابع $f(x)=\sin^{۳}x$، در بازهٔ $(۰ ، ۵\alpha)$ به‌دست آورد که، در آن $\alpha=\frac{\pi}{۱۸۰}$. داریم:

$$f'(x)=۳\sin^{۲}x\cos x\ ;\ f''(x)=۳\sin x(۲-۳\sin^{۲}x)$$

هم $f'(x)$ وهم $f''(x)$ در بازهٔ $(۰،۵\alpha)$ مثبت‌اند. ازمثبت بودن $f''(x)$ نتیجه می‌گیریم که تابع صعودی $f(x)$ [$f(x)$ صعودی است، چون $f'(x)>۰$] دربازهٔ $(۰،۵\alpha)$، تقعری به‌سمت yهای مثبت دارد، یعنی نقطهٔ وسط وتری که دونقطه به‌طول‌های α و ۴α را به‌هم وصل کرده است، در بالای نقطهٔ وسط وتری قرار دارد که دوانتهای آن به‌طول‌های ۲α و ۳α هستند، یعنی

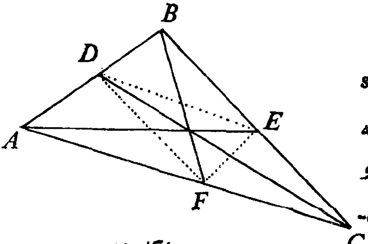
$$\frac{f(\alpha)+f(۴\alpha)}{۲}>\frac{f(۲\alpha)+f(۳\alpha)}{۲} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(\alpha)+f(۴\alpha)>f(۲\alpha)+f(۳\alpha)$$

و از آن‌جا

$$\sin^{۳}۱^\circ+\sin^{۳}۴^\circ>\sin^{۳}۲^\circ+\sin^{۲}۳^\circ$$

۷) نقطه‌های D، E و F را، به ترتیب، وسط ضلع‌های AB ، BC و CA می‌گیریم (شکل ۱۹)، نابرابری‌های زیر، روشن‌اند:



شکل ۱۹

$$|AE|<|AF|+|FE|=\frac{۱}{۲}|AC|+\frac{۱}{۲}|AB|$$

$$|BF|<|BD|+|DF|=\frac{۱}{۲}|AB|+\frac{۱}{۲}|BC|$$

$$|CD|<|CE|+|ED|=\frac{۱}{۲}|BC|+\frac{۱}{۲}|AC|$$

ازمجموع این سه نابرابری، به‌دست می‌آید:

$$|AE|+|BF|+|CD|<|AB|+|AC|+|BC|$$

پاسخ. محیط یک‌مثلث، ازمجموع طول‌های میانه‌های آن بزرگتراست.

۸) باتوجه به‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی (برای ۷ عدد مثبت) داریم:

$$sin^{۴}\alpha cos^{۱۰}\alpha=۲^{۲}.۵^{۵}\left(\frac{sin^{۲}\alpha}{۲}\right)^{۲}\left(\frac{cos^{۲}\alpha}{۵}\right)^{۵}=$$

$$=۱۲۵۰۰\left(\frac{sin^{۲}\alpha}{۲}\right)\cdot\left(\frac{sin^{۲}\alpha}{۲}\right)\times\left(\frac{cos^{۲}\alpha}{۵}\right)\left(\frac{cos^{۲}\alpha}{۵}\right)\left(\frac{cos^{۲}\alpha}{۵}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{cos^{۲}\alpha}{۵}\right)\left(\frac{cos^{۲}\alpha}{۵}\right)\leqslant ۱۲۵۰۰\left(\frac{۲\frac{sin^{۲}\alpha}{۲}+۵\frac{cos^{۲}\alpha}{۵}}{۷}\right)^{۷}=\frac{۱۲۵۰۰}{۷^{۷}}$$

بنابراین

$$۷^{۷}sin^{۴}cos^{۱۰}\alpha\leqslant ۷^{۷}\cdot\frac{۱۲۵۰۰}{۷^{۷}}=۱۲۵۰۰$$

علامت برابری، برای وقتی است‌که داشته باشیم:

$$\frac{sin^{۲}\alpha}{۲}=\frac{cos^{۲}\alpha}{۵}\Longrightarrow\alpha=\mathrm{arc}tg\sqrt{\frac{۲}{۵}}$$

۹) و ۱۰) حل مسأله ۳۲، ۳) را ببینید.

پاسخ. $۲۱^{۲۳}>۲۳^{۲۱}$ ؛ $۵۵۳^{۵۵۵}>۵۵۵^{۵۵۳}$.

۱۱) تابع $f(x)=x-\pi\ln x$ را دربازهٔ $(۰،+\infty)$ درنظر می‌گیریم. داریم:

$$f'(x)=۱-\frac{\pi}{x}=\frac{x-\pi}{x}$$

$f'(x)$ در نقطهٔ $x=\pi$ تغییر علامت می‌دهد و از منفی به مثبت می‌رود، بنا براین، در $x=\pi$ به‌حداقل مقدار خود می‌رسد، یعنی $f(e)>f(\pi)$ یا

$$e-\pi>\pi-\pi\ln\pi \Longrightarrow e+\pi\ln\pi>۲\pi \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \ln e^e+\ln\pi^\pi>\ln e^{۲\pi} \Longrightarrow e^e\cdot\pi^\pi>e^{۲\pi}$$

۱۲) روشن است که برای حقیقی بودن رادیکال‌ها، باید داشته باشیم: $x\geqslant ۱$.

ثابت می‌کنیم: $x>\sqrt{x-۱}+\sqrt{x(\sqrt{x}-۱)}$ و برای این منظور ثابت می‌کنیم:

$$\frac{x}{۲}\geqslant\sqrt{x-۱}\ ,\ \frac{x}{۲}\geqslant\sqrt{x(\sqrt{x}-۱)}$$

درضمن، روشن می‌کنیم، این دونابرابری، به‌طورهم‌زمان، به‌برابری تبدیل نمی‌شوند.

نابرابری اول به $(x-۲)^۲\geqslant ۰$ ونابرابری دوم به $(\sqrt{x}-۲)^۲\geqslant ۰$ تبدیل می‌شوند که درستی آن‌ها واضح است. درضمن، اولی به‌ازای $x=۲$ ودومی به‌ازای $x=۴$ به‌برابری تبدیل می‌شوند. حکم مورد نظر ثابت شد:

$$x>\sqrt{x-۱}+\sqrt{x(\sqrt{x}-۱)}\ .$$

۱۳) با توجه به شرط $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ داریم: $x<tg\,x$ و $۰<۱-tg^۴\frac{x}{۲}<۱$. بنابراین

$$\frac{tg\,x}{x}-\frac{x}{\sin x}=\frac{۱}{x\sin x}\left(\frac{۲tg\frac{x}{۲}}{۱-tg^۲\frac{x}{۲}}\cdot\frac{۲tg\frac{x}{۲}}{۱+tg^۲\frac{x}{۲}}-x^۲\right)>$$

$$>\frac{۱}{x\sin x}\left(\frac{۲x}{۲}\cdot\frac{۲x}{۲}-x^{۲}\right)=۰$$

به‌این ترتیب: $\frac{tgx}{x}>\frac{x}{\sin x}$.

۱۴) α را زاویه‌ای مثبت وحاده و $tg\alpha=\frac{۱}{۵}$ می‌گیریم. دراین صورت

$$tg۲\alpha=\frac{۲tg\alpha}{۱-tg^{۲}\alpha}=\frac{۵}{۱۲}\ ,\ \ tg۴\alpha=\frac{۱۲۰}{۱۱۹}>۱$$

یعنی $tg۴\alpha>tg۴۵^{\circ}$ و $۴\alpha>۴۵^{\circ}$ یا $\alpha>۱۱^{\circ}$، پس

$$tg۱۱^{\circ}<tg\alpha=\frac{۱}{۵}$$

۱۵) آرك تانژانت تابعی فرد است، بنابراین

$$\int_{-۲}^{۲}\operatorname{arc}tgx\,dx=۰;$$

$$\int_{۲}^{۳}\operatorname{arc}tgx\,dx=\int_{-۲}^{۳}\operatorname{arc}tgx\,dx>۰;$$

$$\int_{-۳}^{-۲}\operatorname{arc}tgx\,dx=\int_{-۳}^{۲}\operatorname{arc}tgx\,dx<۰$$

در نتیجه: $\int_{-۳}^{۲}\operatorname{arc}tgx\,dx>\int_{-۲}^{۳}\operatorname{arc}tgx\,dx$.

۱۲۶. روشن است که

$$\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)=\sqrt{۲}\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)\leqslant\sqrt{۲}$$

بنابراین، برای $۰\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$۱\leqslant\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{۲}$$

که، باتوجه به‌قضیه‌ای که‌دربند ۳ ازفصل چهارم آوردیم، می‌توان ازجمله‌های

این نابرابری‌ها، درفاصلهٔ ۰ تا x $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ انتگرال گرفت:

$$\int_0^x dt \leqslant \int_0^x (\sin t + \cos t)\, dt \leqslant \int_0^x \sqrt{2}\, dt$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $x \leqslant \sin x - \cos x + 1 \leqslant \sqrt{2}x$. و اگر $\sin x$ را ازهمه جمله‌های این نابرابری‌ها کم کنیم:

$$x - \sin x \leqslant 1 - \cos x \leqslant x\sqrt{2} - \sin x$$

۱۲۷. درنابرابری روشن $\operatorname{tg}\alpha > \alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$، $\alpha = \frac{\pi}{2} - x$ می‌گیریم، به‌دست می‌آید:

$$\operatorname{cotg} x > \frac{\pi}{2} - x \qquad (*)$$

این نابرابری برای $\frac{\pi}{2} > x > 0$ وبه‌طور بدیهی برای $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ درست است. اگر ازدوطرف‌نابرابری(*)، درفاصلهٔ $\frac{\pi}{6}$ تا x $\left(\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ انتگرال بگیریم:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{x} \operatorname{cotg} t\, dt > \int_{\frac{\pi}{6}}^{x} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt$$

به‌دست می‌آید:

$$\ln \sin t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{x} > \left(\frac{\pi}{2} t - \frac{1}{2} t^2\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{x};$$

$$\ln \sin x - \ln \frac{1}{2} > \left(\frac{\pi}{2} x - \frac{1}{2} x^2\right) - \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right)$$

که بعدازتبدیل‌های ساده، به‌همان نابرابری مورد نظرمسأله می‌رسیم.

۱۲۸. ببینیم، آیا نابرابری دوگانه‌ای که‌ازراه مشتق‌جمله‌های‌نابرابری

دوگانهٔ موردنظر به‌دست می‌آید، درست است یا نه (به‌ازای $x \geqslant 0$):

$$1-x+x^2-\dots+x^{2n}-x^{2n+1} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant$$

$$\leqslant 1-x+x^2-\dots+x^{2n}$$

عبارت‌های سمت چپ وسمت راست این نابرابری دوگانه، به‌تصاعد هندسی‌اند وقابل جمع کردن:

$$\frac{1-x^{2n+2}}{1+x} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1+x^{2n+1}}{1+x} \quad (x \geqslant 0)$$

که درستی آن روشن است. اکنون اگر ازهمهٔ جمله‌های این دونابرابری، در فاصلهٔ از 0 تا x $(x>0)$ انتگرال بگیریم، به‌همان نابرابری مورد نظر می‌رسیم.

۱۲۹. راهنمائی. از دوطرف نابرابری روشن $tg\,x > x$، درفاصلهٔ از 0 تا x انتگرال بگیرید $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

۱۳۰. راهنمائی. ابتدا درستی نابرابری متناظر نابرابری مفروض‌را، با مشتق گرفتن ازدوطرف آن، ثابت کنید. یادآوری می‌کنیم که، نابرابری اخیر، با توجه به‌نابرابری روشن $\sin\alpha<\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ ثابت می‌شود.

۱۳۱. ازمشتق این نابرابری به دست می‌آید: $\sin x+tg\,x \geqslant 2x$ که درست است $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. درواقع، اگریکباردیگر ازاین نابرابری‌مشتق بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\cos x+\frac{1}{\cos^2 x} \geqslant 2$$

چون دربازهٔ $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ داریم $0<\cos x \leqslant 1$، باتوجه به‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی

$$\cos x+\frac{1}{\cos^2 x} \geqslant 2\sqrt{\cos x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = 2\sqrt{\frac{1}{\cos x}} \geqslant 2$$

۱۴۲. روشن است که

$$0<(\sqrt{N}-a)^3=N\sqrt{N}-3aN+3a^2\sqrt{N}-a^3$$

بنابراین $\sqrt{N}(3a^2+N)>a^3+3aN$، یعنی $\sqrt{N}>\dfrac{a(a^2+3N)}{3a^2+N}$؛

به‌همین ترتیب

$$0>[\sqrt{N}-(a+1)]^3=N\sqrt{N}-3(a+1)N+$$

$$+3(a+1)^2\sqrt{N}-(a+1)^3;$$

$$\sqrt{N}[3(a+1)^3+N]<[(a+1)^3+3(a+1)N;$$

$$\sqrt{N}<\frac{(a+1)[(a+1)^2+3N]}{3(a+1)^2+N}$$

۱۴۳. از نابرابری $(\sqrt[3]{N}-a)^2>0$ به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[3]{N^2}+a^2>2a\sqrt[3]{N} \qquad (*)$$

درضمن ازنابرابری $\sqrt[3]{N}>a$ نتیجه می‌شود: $\sqrt[3]{N^2}-a^2>0$. دوطرف نابرابری (*) رادرمقدارمثبت $\sqrt[3]{N^2}-a^2$ ضرب می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{N^4}-a^4>2a\sqrt[3]{N}(\sqrt[3]{N^2}-a^2)$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[3]{N}(N+2a^3)>a(a^3+2N)\Longrightarrow\sqrt[3]{N}>\frac{a(a^3+2N)}{2a^3+N}$$

به همین ترتیب از نابرابری $[\sqrt[3]{N}-(a+1)]^2>0$ داریم:

$$\sqrt[3]{N^2}+(a+1)^2>2(a+1)\sqrt[3]{N}$$

که اگر دوطرف آن را درمقدارمنفی $\sqrt[3]{N^2}-(a+1)^2$ ضرب کنیم، بعداز عمل‌های ساده نتیجه می‌شود:

$$\sqrt[3]{N}<\frac{(a+1)[(a+1)^3+2N]}{2(a+1)^3+N}$$

۱۳۴. چندجمله‌ای $f(x)$ سمت چپ معادله بر $(x-1)(x-2)$ یعنی بر x^2-3x+2 بخش‌پذیر است. بنا بر این

$$f(x)=(x^2-3x+2)(a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-1}x^{n-1}+\dots$$
$$\dots+a_2x^2+a_1x+a_0)$$

از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم، همهٔ ضریب‌های A_i از -2 بزرگتر باشند، یعنی داشته باشیم: $A_i\geqslant -1$. در این صورت

$$A_0=2a_0>-1;\ A_1=2a_1-3a_0\geqslant -1;$$
$$A_k=2a_k-3a_{k-1}+a_{k-2}\geqslant -1 \qquad (2\leqslant k\leqslant n-2);$$
$$A_{n-1}=-3a_{n-2}+a_{n-3}\geqslant -1;\ A_n=a_{n-2}\geqslant -1$$

از نابرابری اول نتیجه می‌شود: $a_0\geqslant -\frac{1}{2}$ یا $a_0\geqslant 0$ (زیرا ضریب‌ها، عددهایی درست اند). از نابرابری دوم به دست می‌آید: $a_1\geqslant a_0+\frac{1}{2}(a_0-1)$. اگر $a_0=0$ آن وقت $a_1\geqslant -\frac{1}{2}$، یعنی $a_1\geqslant a_0=0$، و اگر $a_0>0$ یعنی $a_0\geqslant 1$، آن‌وقت $a_1\geqslant a_0$. به‌این ترتیب در هر دو حالت داریم: $a_1\geqslant a_0\geqslant 0$. فرض کنید، به‌همین ترتیب، به دست آورده باشیم:

$$a_{k-1}\geqslant a_{k-2}\geqslant \dots \geqslant a_1\geqslant a_0\geqslant 0$$

در این‌صورت، از $A_k\geqslant -1$ نتیجه می‌شود: $3a_k\geqslant 3a_{k-1}-a_{k-2}-1$، یا

$$a_k\geqslant a_{k-1}+\frac{1}{2}(a_{k-1}-a_{k-2})-\frac{1}{2}$$

از آن‌جا، با توجه به‌این‌که $a_{k-1}-a_{k-2}\geqslant 0$ به‌دست می‌آید:

$$a_k\geqslant a_{k-1}-\frac{1}{2}\Longrightarrow a_k\geqslant a_{k-1}$$

(زیرا a_k عددی درست است). بنا بر این

$$a_{n-2}\geqslant a_{n-3}\geqslant a_{n-4}\geqslant \dots \geqslant a_2\geqslant a_1\geqslant a_0\geqslant 0$$

از نابرابری مربوط به A_{n-1}، یعنی $-3a_{n-2}+a_{n-3}\geqslant -1$ داریم:

$$۲a_{n-۲}\leqslant ۱-(a_{n-۲}-a_{n-۳})$$

یا $\frac{۱}{۲}\geqslant a_{n-۲}$، یعنی $۰\leqslant a_{n-۲}$. با توجه‌های به نابرابری مربوط به A_n، یعنی $۱-\leqslant a_{n-۲}$ نتیجه می‌شود: $۰=a_{n-۲}$. ولی‌در‌این‌صورت، همهٔ a_iها وهمهٔ A_iها برابرصفر و چندجمله‌ای مفروض $f(x)$ متحد باصفرمی‌شود.

به‌این ترتیب، اگر چندجمله‌ای $f(x)$ متحد با صفر نباشد، دست‌کم یکی‌از ضریب‌های آن، از ۲ — تجاوز نمی‌کند.

۱۳۵. تابع $f(x)=\ln(x+۱)-\frac{۲x}{x+۲}$ را درنظر می‌گیریم $(۰<x<+\infty)$ داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{x+۱}-\frac{۲(x+۲)-۲x}{(x+۲)^۲}=\frac{x^۲}{(x+۱)(x+۲)^۲}>۰$$

بنابراین، f تابعی صعودی است و برای هر $۰<x$، نابرابری $f(x)>f(۰)=۰$ برقرار است. به این ترتیب، یکی‌از نابرابری‌ها ثابت شد. نابرابری دوم هم، به‌همین ترتیب ثابت می‌شود.

۱۳۶. اگرعدد موردنظر را a بگیریم، بنابرشرط مسأله، باید داشته باشیم: $a=p^mq^n$ که، درآن، p و q عددهایی‌اول‌اند. مقسوم‌علیه‌های طبیعی این عدد عبارتنداز همهٔ حاصل ضرب دوبه‌دوی عددهای

$$۱، p، p^۲، \ldots، p^m \text{ و } ۱، q، q^۲، \ldots، q^n$$

ودرنتیجه، بنابرشرط دیگرمسأله، باید داشته‌باشیم:

$$(۱+p+p^۲+\cdots+p^m)(۱+q+q^۲+\cdots+q^n)=۲q^mq^n \quad (۱)$$

توجه می‌کنیم‌که یا عامل اول سمت چپ برابری (۱) از $\sqrt{۲}p^m$ و یا عامل دوم از $\sqrt{۲}q^n$ کوچکتر نیست، زیرا درغیراین‌صورت سمت چپ‌برابری از $۲p^mq^n$ کوچکترمی‌شود. برای مشخص‌بودن وضع، فرض می‌کنیم:

$$۱+p+p^۲+\cdots+p^m\geqslant\sqrt{۲}p^m$$

باتوجه به‌این‌که، درسمت چپ این نابرابری مجموع $(m+۱)$ جمله ازیك تصاعد هندسی قرار دارد، داریم:

$$\frac{p^{m+۱}-۱}{p-۱} \geqslant \sqrt{۲}\,p^m \Longrightarrow (\sqrt{۲}-۱)p^{m+۱} \leqslant \sqrt{۲}\,p^m-۱<\sqrt{۲}\,p^m$$

از آن جا: $p<\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}-۱}=۲+\sqrt{۲}$، یعنی $p\in\{۲، ۳\}$.

ابتدا $p=۳$ را در نظر می‌گیریم. برابری (۱)، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(۳^{m+۱}-۱)(۱+q+\cdots+q^n)=۴\cdot۳^m q^n$$

چون $۱+q+\cdots+q^n$ بر q و $۳^{m+۱}-۱$ بر ۳ بخش‌پذیر نیستند، از این برابری نتیجه می‌شود که باید یکی از سه‌دستگاه زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}۳^{m+۱}-۱=۴q^n\\ ۱+q+\cdots+q^n=۳^m\end{cases};\quad \begin{cases}۳^{m+۱}-۱=۲q^n\\ ۱+q+\cdots+q^n=۲\times۳^m\end{cases};$$

$$\begin{cases}۳^{m+۱}-۱=q^n\\ ۱+q+\cdots+q^n=۴\times۳^m\end{cases}$$

به دستگاه اول می‌پردازیم. ازمعادلهٔ اول آن داریم: $۳^m=\frac{۴q^n+۱}{۳}$ که بعداز قراردادن درمعادلهٔ دوم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{q^{n+۱}-۱}{q-۱}=\frac{۴q^n+۱}{۳}\Longrightarrow q^{n+۱}=۴q^n-q-۲<۴q^n$$

یعنی $q<۴$ و یا $q=۲$ یا $q=۳$. ولی $q\neq p$، پس $q=۲$.

اگر دستگاه دوم یا دستگاه سوم را هم مورد بررسی قراردهیم، به‌همان جواب $q=۲$، می‌رسیم. بنابراین، اگر $p=۳$، آن وقت $q=۲$. به این ترتیب، یکی‌از مقسوم علیه‌های عدد مجهول، باید برابر ۲ باشد.

$p=۲$ را درنظرمی‌گیریم. دراین‌صورت، برابری (۱) چنین می‌شود:

$$(۱+۲+۲^۲+\cdots+۲^m)(۱+q+\cdots+q^n)=۲^{m+۱}q^n \quad (۲)$$

چون عامل اول سمت چپ، عددی فرد است، وعامل دوم بر q بخش پذیر نیست، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}۱+۲+\cdots+۲^m=q^n\\ ۱+q+\cdots+q^n=۲^{m+۱}\end{cases}$$

ازمعادلهٔ اول این دستگاه، به‌دست می‌آید: $2^{m+1}=1+q^n$، که اگر در معادلهٔ دوم قراردهیم:

$$1+q+\cdots+q^n=1+q^n$$

که تنها به ازای $n=1$ برقرار است.

به این ترتیب، عدد مجهول باید به صورت $2^m q$ باشد که، درآن $q=2^{m+1}-1$ عددی اول است. آزمایش هم نشان می‌دهدکه، چنین عددی باهمهٔ شرطهای مسأله می‌سازد. یکی‌از این عددها $2(2^2-1)=6$ و یکی دیگر $2^2(2^3-1)=28$ وجواب سوم برابر $2^4(2^5-1)$، یعنی ۴۹۶ است. به‌همین ترتیب، می‌توان جواب‌های دیگری به‌دست آورد.

۱۳۷. سمت چپ نابرابری را P می‌نامیم . روشن است که $P=P_1\times P_2$، به‌شرطی‌که

$$P_1=\frac{(2+1)(3+1)\cdots(n+1)}{(2-1)(3-1)\cdots(n-1)}=\frac{3\times 4\times\cdots\times(n+1)}{1\times 2\times\cdots\times(n-1)}=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2};$$

$$P_2=\frac{2^2-2+1}{2^2+2+1}\cdot\frac{3^2-3+1}{3^2+3+1}\cdots\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}=$$

$$=\frac{3\cdot 7\cdot 13\cdot 21\cdot 31\cdots(n^2-3n+1)(n^2-n+1)}{7\cdot 13\cdot 21\cdot 31\cdots(n^2-n+1)(n^2+n+1)}=\frac{3}{n^2+n+1}$$

به‌این ترتیب داریم:

$$P=P_1\cdot P_2=\frac{3}{2}\cdot\frac{n^2+n}{n^2+n+1}<\frac{3}{2}$$

۱۳۸. قدرنسبت تصاعد را d ودوبرابر بخش وسط این نابرابری دوگانه را $2S$ می‌نامیم. داریم:

$$2S=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_3a_4}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}+$$

$$+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}<\frac{1}{a_0a_1}+\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots$$

$$\dots+\frac{1}{a_{2n-2}a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}=\frac{1}{d}\left(\frac{a_1-a_0}{a_0a_1}+\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\frac{a_{2n-1}-a_{2n-2}}{a_{2n-2}a_{2n-1}}+\frac{a_{2n}-a_{2n-1}}{a_{2n-1}a_{2n}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_{2n-2}}-\frac{1}{a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n-1}}-\frac{1}{a_{2n}}\right)=$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_{2n}}\right)=\frac{2n}{a_0a_{2n}}\Longrightarrow s<\frac{n}{a_0a_{2n}}$$

نابرابری سمت راست ثابت شد. نابرابری سمت چپ هم، به همین ترتیب ثابت می‌شود.

۱۳۹. اگر شعاع کرهٔ مفروض را R بگیریم و فرض کنیم، زاویهٔ بین مولد وصفحهٔ قاعدهٔ مخروطی که بر کره محیط شده‌است، برابر φ باشد، شعاع قاعدهٔ مخروط برابر $R\,cotg\frac{\varphi}{2}$ وارتفاع مخروط، برابر $R\,tg\varphi\, cotg\frac{\varphi}{2}$ می‌شود. بنابراین، حجم چنین مخروطی، برابراست با

$$V_1=\frac{1}{3}\pi R^3 tg\varphi\, cotg^3\frac{\varphi}{2}$$

و چون حجم کره برابر است با $V_2=\frac{4}{3}\pi R^3$، در نتیجه، برای نسبت حجم مخروط محیطی به حجم کره، خواهیم داشت:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{4}\,cotg^3\frac{\varphi}{2}tg\varphi$$

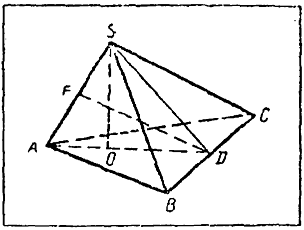
برای اینکه ، مخروط محیطی دارای حداقل حجم باشد ، باید $cotg^3\frac{\varphi}{2}tg\varphi$ به کمترین مقدارممکن خود برسد داریم:

$$cotg^3\frac{\varphi}{2}tg\varphi=\frac{cotg^3\frac{\varphi}{2}\cdot 2tg\frac{\varphi}{2}}{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{2}{\left(1-tg^2\frac{\varphi}{2}\right)tg^2\frac{\varphi}{2}}$$

باید حاصل ضرب دوعامل مثبت $\left(1-tg^2\frac{\varphi}{2}\right)$ و $tg^2\frac{\varphi}{2}$، که مجموع ثابتی دارند، حداکثر مقدار ممکن باشد، یعنی داشته باشیم: $1-tg^2\frac{\varphi}{2}=tg^2\frac{\varphi}{2}$ یا $tg^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}$ که، در این صورت

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{4}cotg^3\frac{\varphi}{2}tg\varphi=\frac{2}{4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=2\Longrightarrow V_1=2V_2$$

کمترین حجم برای مخروط محیط بر کرهٔ مفروض، برابراست با دو برابر حجم کره، و وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم: $tg^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}$ یا $\varphi=\arccos\frac{1}{3}$.



شکل ۲۵

۱۴۰. $[SO]$ را ارتفاع هرم و $[AD]$ را عمود بر $[BC]$ می‌گیریم (شکل ۲۵).

در این صورت

$O\in[AD]$ و $|BD|\cdot|AD|=1$

اگر فرض کنیم: $|BC|=|AS|=2x$، آن وقت $|BD|=x$ و $|AD|=|SD|=\frac{1}{x}$.

معادلهٔ $|AD|\cdot|SO|=|AS|\cdot|DF|$ را تشکیل می‌دهیم که، در آن $[DF]$ بر $[AS]$ عمود است. از این معادله نتیجه می‌شود:

$$|SO|=2x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}-x^2}=2x\sqrt{1-x^4}$$

عبارت $x\sqrt{1-x^4}$، هم‌زمان با عبارت $f(x)=x^2(1-x^4)$ به‌حداکثر مقدار

خود می‌رسد. ولی تابع $f(x)=(x^۴)^{\frac{۱}{۲}}(۱-x^۴)$، با توجه به ثابت بودن مجموع $x^۴$ و $۱-x^۴$، وقتی به بیشترین مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم:

$$\frac{x^۴}{\frac{۱}{۲}}=۱-x^۴ \Longrightarrow x^۲=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

[می‌توانستیم از مشتق تابع $f(x)$ استفاده کنیم. $f'(x)=۲x-۶x^۵$ به‌ازای $x=۰$ و $x^۲=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$، برابر صفر می‌شود.] به‌این ترتیب، ارتفاع هرم، وهم‌زمان با آن، حجم هرم، به‌ازای $x^۲=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$، به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد. از طرف دیگر، داریم:

$$tg\,\widehat{ABC}=\frac{۱}{x^۲}=\sqrt{۳} \Longrightarrow \widehat{ABC}=۶۰^\circ$$

یعنی، مثلث ABC، متساوی‌الاضلاع است.

۱۴۱. حجم چنین هرمی برابر است با $V=\frac{\sqrt{۳}\,tg\alpha}{(۴+tg^۲\alpha)^{\frac{۳}{۲}}}$.

درواقع، اگر طول ضلع قاعدهٔ هرم را برابر $۲x$ بگیریم وطول ارتفاع SO را یکبار از رابطهٔ فیثاغورث درمثلث SDO ($[SD]\perp[AC]$) ویکبار درهمان مثلث، برحسب $tg\alpha$ به‌دست آوریم، طول ضلع مثلث قاعده، برابر $\frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۴+tg^۲\alpha}}$ می‌شود. بنابراین، مساحت قاعدهٔ هرم، برابر $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴+tg^۲\alpha}$ و ارتفاع هرم، برابر $\frac{tg\alpha}{\sqrt{۴+tg^۲\alpha}}$ و، در نتیجه، حجم آن، برابر $\frac{\sqrt{۳}\,tg\alpha}{\sqrt{(۴+tg^۲\alpha)^۳}}$ است.

به سادگی روشن می‌شود که، به ازای $\alpha\to۰$ و $\alpha\to\frac{\pi}{۲}$، مقدار حجم به‌سمت صفر میل می‌کند، فرض می‌کنیم:

$$tg^۲\alpha=x \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{x}{(۴+x)^۳}$$

از آن جا $f'(x)=\frac{۴-۲x}{(۴+x)^{۴}}$ که به‌ازای $x=۲$ برابر صفر می‌شود، یعنی برای این‌که هرم مفروض، دارای حجمی حداکثر باشد، باید داشته باشیم:

$$tg^{۲}\alpha=۲ \Longrightarrow tg\alpha=\sqrt{۲} \Longrightarrow \alpha=\operatorname{arc}\, tg\sqrt{۲}$$

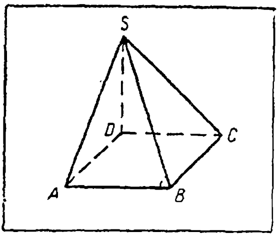
۱۴۲. طبق فرض، $[SD]$ ارتفاع هرم است (شکل ۲۱) و همهٔ وجه‌های جانبی، مثلث‌هایی قائم‌الزاویه‌اند (چرا؟). چون

$|SB|=\sqrt{۲}$ و

$|AB|=|DC|<|SC|=۱$

پس

$$cos\alpha=|AB|:|SB|<۱:\sqrt{۲}$$



شکل ۲۱

و $\frac{\pi}{۴}<\alpha<\frac{\pi}{۲}$. حجم هرم چنین می‌شود:

$$V=\frac{\sqrt{۲}}{۳}cos\alpha\sqrt{۱-۲cos^{۲}\alpha}$$

حجم هرم، هم‌زمان با $۲cos^{۲}\alpha(۱-۲cos^{۲}\alpha)$ به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد و چون مجموع دومقدار مثبت $۲cos^{۲}\alpha$ و $۱-۲cos^{۲}\alpha$، ثابت است، حداکثر حاصل ضرب آن‌ها، وقتی است که باهم برابر باشند:

$$۲cos^{۲}\alpha=۱-۲cos^{۲}\alpha \Longrightarrow ۴cos^{۲}\alpha=۱ \Longrightarrow \alpha=\frac{\pi}{۳}$$

که به‌ازای آن داریم: $V=\frac{۱}{۶}$.

یادداشت. مسأله را می‌توانستیم، بدون محاسبهٔ حجم هرم حل کنیم. درواقع

$$V=\frac{۱}{۳}|BC|\cdot|DC|\cdot|SD|=\frac{۱}{۳}|DC|\cdot|SD|$$

حاصل ضرب $|DC|\cdot|SD|$، عبارت است از دوبرابر مساحت مثلث SDC و چون وتر این مثلث، برابر واحد است، مساحت آن به ازای

$|SD|=|DC|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ به‌حداکثرخودمی‌رسد. دراین حالت

$$\cos\alpha=|AB|:|SB|=1:2 \text{ و } \alpha=\frac{\pi}{3}$$

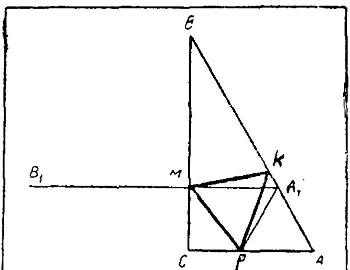
۱۴۳. حجم هرم به‌سادگی به‌دست می‌آید (خودتان پیداکنید):

$$V=\frac{4}{3}\sin^2\alpha\cos^5\alpha=\frac{4}{3}(\sin^2\alpha)^1(\cos^2)^{\frac{5}{2}}$$

چون مجموع دومقدارمثبت $\sin^2\alpha$ و $\cos^2\alpha$، برابر واحد و ثابت است، پس حاصل ضرب توان‌هایی از آن‌ها، وقتی به حداکثر خود می‌رسدکه، این دو مقدار، باتوان‌هایشان متناسب باشند:

$$\frac{\sin^2\alpha}{1}=\frac{\cos^2\alpha}{\frac{5}{2}}\Longrightarrow\cos^2\alpha=\frac{5}{7}\Longrightarrow\alpha=\arccos\sqrt{\frac{5}{7}}$$

۱۴۴. فرض کنید، مثلث متساوی‌الاضلاع PMK را، آن‌طور که در شکل ۲۲ می‌بینید، در مثلث ABC محاط کرده‌باشیم $|AC|=1$ و $|CP|=x$ می‌گیریم. نقطهٔ M را می‌توان ازنقطهٔ K، ضمن دوران به‌اندازهٔ ۶۰ درجه دورنقطهٔ P به‌دست آورد. چون M روی ضلع BC و K روی ضلع AB است،



شکل ۲۲

بنابراین M را می‌توان، به عنوان نقطهٔ برخورد پاره‌خط‌های راست BC و A_1B_1 به‌دست آوردکه، درآن، $[B_1A_1]$ عبارت است ازنتیجهٔ دوران $[BA]$ دورP و به‌اندازهٔ ۶۰ درجه. چون $\hat{A}=60^\circ$، پس$A_1\in[AB]$؛مثلث PAA_1 متساوی‌الاضلاع است و$(AC)||(A_1B_1)$. بنابراین $|MC|=\frac{(1-x)\sqrt{3}}{2}$

وطول ضلع مثلث محاطی، چنین می‌شود:

$$|PM|=\sqrt{x^۲+(۱-x)^۲\cdot\frac{۳}{۴}}$$

تابع $f(x)=x^۲+\frac{۳}{۴}(۱-x)^۲=\frac{۱}{۴}(۷x^۲-۶x+۳)$، به‌ازای $x=\frac{۳}{۷}$، به حداقل مقدارخود می‌رسد، به‌این ترتیب اگر $|CP|:|PA|=۳:۴$، آن وقت، مثلث PMN، مثلث مورد نظر است.

۱۴۵. با توجه به‌فرض وهمچنین نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی دوعدد مثبت داریم:

$$\log_{\frac{۱}{۲}}(ab)=\log_{\frac{۱}{۲}}a+\log_{\frac{۱}{۲}}b\geqslant ۲\sqrt{\log_{\frac{۱}{۲}}a\cdot\log_{\frac{۱}{۲}}b}=۲$$

بنابراین $ab\leqslant\frac{۱}{۴}$؛ درضمن، علامت برابری برای $a=b=\frac{۱}{۲}$ پیش‌می‌آید:

ab حداقل مقدار ندارد، زیرا شرط مسأله برای $a=\frac{۱}{۲^n}$ و $b=\frac{۱}{\sqrt[n]{۲}}$ برقرار است که، دراین‌صورت $ab=۲^{-n-\frac{۱}{n}}$، برای $n\to\infty$، به سمت صفرمیل می‌کند، یعنی می‌تواند هرعدد مثبت به دلخواه‌کوچکی باشد.

۱۴۶. اگر برابری‌های فرض را به‌صورت دستگاه زیر بنویسیم:

$$\begin{cases}y+z=۲-x\\ y\cdot z=۱-x(۲-x)\end{cases}$$

معلوم می‌شودکه y و z، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیرهستند:

$$t^۲-(۲-x)t+۱-x(۲-x)=۰$$

این معادله، باید ریشه‌های حقیقی داشته باشد وبنابراین

$$(۲-x)^۲-۴+۴x(۲-x)\geqslant ۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $0 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$؛ درنتیجه، با توجه به تقارن، y و z هم، درهمین شرط صدق می‌کنند.

۱۴۷. به‌ترتیب داریم:

$$y^2 = \left(\frac{a - b\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha} + b^2 tg^2\alpha - \frac{-2ab\sin\alpha}{\cos^2\alpha} =$$

$$= \left(\frac{b - a\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + (a^2 - b^2)(1 + tg^2\alpha) - (a^2 - b^2)tg^2\alpha =$$

$$= \left(\frac{b - a\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + a^2 - b^2 \geqslant a^2 - b^2$$

یعنی $y \geqslant \sqrt{a^2 - b^2}$؛ y وقتی به‌حداقل خود، یعنی $\sqrt{a^2 - b^2}$ می‌رسد که داشته باشیم: $b - a\sin\alpha = 0$، یعنی به ازای $\sin\alpha = \frac{b}{a}$.

یادداشت. برای حل بسیاری از مسأله‌های مربوط به‌حداکثر وحداقل، می‌توان ازروش ضریب‌های نامعین و به‌طریق زیر استفاده‌کرد: مجذور تابع مورد مطالعه را، به یاری ضریب کمکی، به صورت مجموع جبری دوتابع می‌نویسیم، به‌نحوی‌که یکی‌ازآن‌ها مجذورکامل ودومی تابعی ساده‌ترازتابع مفروض باشد (که درحالت خاص، تابع دوم ممکن است برابرمقدار ثابت شود). مقدار ضریب را طوری انتخاب می‌کنیم‌که هردو تابع، به ازای یك مقدار متغیر به‌اکسترمم خود برسند. مثلا، برای حل مسألهٔ ۱۴۷، می‌توانستیم بنویسیم:

$$\left(\frac{a - b\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a}{\lambda} - \lambda b\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{\cos^2\alpha}\left[a^2 - \frac{a^2}{\lambda^2} + b^2(1 - \lambda^2)\sin^2\alpha\right]$$

که درآن، جملهٔ دوم را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\left(\frac{a^2}{b^2\lambda^2}-\sin^2\alpha\right)\frac{(\lambda^2-1)b^2}{\cos^2\alpha}$$

$\lambda=\frac{a}{b}$ می‌گیریم، به‌نحوی‌که داشته باشیم:

$$\frac{a^2}{b^2\lambda^2}-\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$$

دراین صورت خواهیم داشت:

$$\left(\frac{a-b\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=\left(\frac{b-a\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2+a^2-b^2\geqslant a^2-b^2$$

علامت برابری، برای $b-a\sin\alpha=0$ ، یعنی $\sin\alpha=\frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید.

۱۴۸. ابتدا یادآوری می‌کنیم‌که، برای a و b مثبت و $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ، حداکثرمقدار تابع $y=a\sin\alpha+b\cos\alpha$ برابراست با $\sqrt{a^2+b^2}$ زیرا با فرض $tg\varphi=\frac{a}{b}$ به‌ترتیب داریم:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=b(tg\varphi\sin\alpha+\cos\alpha)=\frac{b}{\cos\varphi}\cos(\alpha-\varphi)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha-\varphi)\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$$

(با فرض $tg\varphi=\frac{a}{b}$، به دست می‌آید: $\cos\alpha=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$)، علامت برابری برای $\alpha=\varphi$.

اکنون، باروشی‌که دریادداشت مسألهٔ قبل‌از آن صحبت‌کردیم، به حل مسألهٔ خود می‌پردازیم. داریم:

$$y^2=-\left(a\lambda\sqrt{\sin\alpha}-\frac{b}{\lambda}\sqrt{\cos\alpha}\right)^2+a^2(1+\lambda^2)\sin\alpha+$$

$$+\frac{b^{۲}}{\lambda^{۲}}(۱+\lambda^{۲})\cos\alpha$$

حداکثر تابع اول برابر صفر است، یعنی وقتی که

$$a\lambda\sqrt{\sin\alpha}-\frac{b}{\lambda}\sqrt{\cos\alpha}=۰ \Longrightarrow tg\alpha=\frac{b^{۲}}{a^{۲}\lambda^{۴}}$$

و تابع دوم، با توجه به مقداری که برای حداکثر $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ به دست آوردیم، وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم: $tg\alpha=\frac{a^{۲}\lambda^{۲}}{b^{۲}}$.

λ را طوری پیدا می‌کنیم که، حداکثر دو تابع، به ازای یک مقدار α به دست آید. برای این منظور، باید داشته باشیم:

$$\frac{b^{۲}}{a^{۲}\lambda^{۴}}=\frac{a^{۲}\lambda^{۲}}{b^{۲}} \Longrightarrow \lambda=\sqrt[۳]{\frac{b^{۲}}{a^{۲}}} \text{ و } tg\alpha=\sqrt[۳]{\frac{a^{۲}}{b^{۲}}}$$

و به این ترتیب، سرانجام خواهیم داشت:

$$a\sqrt{\sin\alpha}+b\sqrt{\cos\alpha}\leqslant\left(a^{\frac{۴}{۳}}+b^{\frac{۴}{۳}}\right)^{\frac{۳}{۴}}$$

یادداشت. روشن است که ماکزیمم عبارت $a\sqrt{\sin\alpha}+b\sqrt{\cos\alpha}$ را به کمک مشتق هم می‌توان به‌دست آورد:

$$f(\alpha)=a\sqrt{\sin\alpha}+b\sqrt{\cos\alpha}\ ,$$

$$f'(\alpha)=\frac{a\sqrt{\cos^{۳}\alpha}-b\sqrt{\sin^{۳}\alpha}}{۲\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}}$$

وجواب $f'(\alpha)=۰$ عبارت است از $tg\alpha=\sqrt[۳]{\frac{a^{۲}}{b^{۲}}}$.

۱۴۹. روشن است که نقطهٔ (x, y) که در آن $x>۲$ یا $|y|>۲$، در معادلهٔ مفروض صدق نمی‌کند و، بنابراین، نقطه‌هایی در این معادله صدق

می‌کنند که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$۱\leqslant x\leqslant ۲ \quad ، \quad ۱\leqslant y\leqslant ۲$$

به‌این ترتیب $f(x،y)=\frac{y}{x}\geqslant\frac{۱}{۲}$. علاوه براین، نقطهٔ $(۲،۱)$ با شرط‌های مسأله سازگار است، یعنی حداقل مقدار $\frac{y}{x}$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۵۰. با توجه به‌شرط $x^۴+y^۴=۱$ داریم $|x|\leqslant ۱$ و $|y|\leqslant ۱$ و بنابراین

$$x^۹\leqslant x^۴ \quad \text{و} \quad y^۹\leqslant y^۴$$

درنتیجه $x^۹+y^۹\leqslant ۱$. درضمن، علامت برابری وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$x^۹=x^۴ \quad \text{و} \quad y^۹=y^۴$$

وروشن است که این شرط، برای $x=۱$، $y=۰$ یا $x=۰$، $y=۱$ برقرار است.

۱۵۱. با توجه به نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی می‌توان نوشت:

$$y=n\frac{ax^m}{n}+m\,\frac{b}{mx^n}\geqslant(m+n)\sqrt[m+n]{\left(\frac{ax^m}{n}\right)^n\left(\frac{b}{mx^n}\right)^m}=$$

$$=(m+n)\sqrt[m+n]{\frac{a^nb^m}{m^mn^n}} \qquad (۱)$$

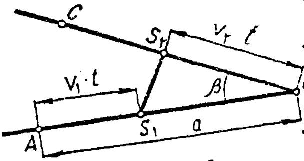
علامت برابری وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم: $\frac{ax^m}{n}=\frac{b}{mx^n}$، یعنی برای $x=\sqrt[m+n]{\frac{nb}{ma}}$. به‌این ترتیب، حداقل مقدارعبارت مفروض، برابرمقدارسمت راست (۱) است.

۱۵۲. از نابرابری روشن $(a_i-b_i)^۲\geqslant ۰$ به‌دست می‌آید:

$$a_i^2-2a_ib_i+b_i^2\geqslant 0 \Longrightarrow \frac{a_i^2}{b_i}\geqslant 2a_i-b_i$$

$(i=1, 2, \ldots, n)$. از آن‌جا

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\geqslant 2\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}b_i=2\times 1-1=1$$



شکل ۲۳

۱۵۳. تابع مورد بررسی عبارت است از طول پاره خط است S_1S_2 که، در آن، S_1 و S_2، به‌ترتیب موضع متحرک‌ها، بعد از گذشت زمان t روی مسیرهای مربوط به‌خودمی‌باشند. درمثلث S_1S_2B داریم:

$$|S_1S_2|^2=|S_1B|^2+|S_2B|^2-$$
$$-2|S_1B|\cdot|S_2B|\cdot\cos\beta.\ (0<\beta<\frac{\pi}{2})$$

با توجه به‌برابری‌های $|S_2B|=v_2t$ و $|AS_1|=v_1t$، خواهیم داشت:

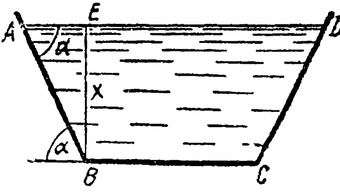
$$f(t)=|S_1S_2|^2=(a-v_1t)^2+(v_2t)^2-2(a-v_1t)(v_2t)\cdot\cos\beta$$

$f(t)$ نسبت به t ازدرجه دوم با ضریب درجهٔ دوم

$$v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\beta$$

است که مقداری مثبت است ($\cos\beta>0$ ،$v_2>0$ ،$v_1>0$). بنابراین $f(t)$ دارای حداقلی است که به‌ازای جواب مشتق آن به‌دست می‌آید:

$$f'(t)=0 \Longrightarrow t=\frac{a(v_2\cos\beta+v_1)}{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\beta}$$



شکل ۲۴

۱۵۴. باید بخشی را که زیر آب است، یعنی خط شکسته $|AB|+|BC|+|CD|$ را به‌عنوان تابع مورد بررسی درنظر بگیریم. عمق کانال را x می‌نامیم. روشن است که

$|AB| = \frac{x}{sin\alpha}$ و به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$|BC| = \frac{S}{x} - \frac{x}{tg\alpha}$$

به‌این ترتیب، تابعی‌که باید مورد بررسی قرارگیرد، به‌دست می‌آید:

$$f(x) = \frac{۲x}{sin\alpha} + \frac{S}{x} - \frac{x}{tg\alpha},$$

$$f'(x) = \frac{۲}{sin\alpha} - \frac{۱}{tg\alpha} - \frac{S}{x^۲}$$

بنابراین، برای $f'(x)=۰$ به‌دست می‌آید: $x = \sqrt{\frac{S \cdot sin\alpha}{۲ - cos\alpha}}$ و $f(x)$ درهمین نقطه، به‌حداقل خود می‌رسد (چرا؟)

۱۵۵. چون $\frac{۱+sin^۲x}{sin^۲x} > ۰$ و $\frac{۱+cos^۲x}{cos^۲x} > ۰$، باتوجه به‌نابرابری روشن

$$\frac{۱}{۲}(a^n + b^n) \geqslant \left(\frac{a+b}{۲}\right)^n, \qquad (a>۰ , b>۰)$$

می‌توان به‌ترتیب نوشت:

$$f(x) = \left(\frac{۱+sin^۲x}{sin^۲x}\right)^n + \left(\frac{۱+cos^۲x}{cos^۲x}\right)^n \geqslant$$

$$\geqslant \frac{۲\left(\frac{۱+sin^۲x}{sin^۲x} + \frac{۱+cos^۲x}{cos^۲x}\right)^n}{۲^n} = \frac{۱}{۲^{n-۱}}\left(۲ + \frac{۱}{sin^۲x} + \frac{۱}{cos^۲x}\right)^n =$$

$$= ۲^{۱-n}\left(۲ + \frac{۴}{sin^۲۲x}\right)^n \geqslant ۲^{۱-n}(۲+۴)^n = ۲^{۱-n} \cdot ۶^n = ۲ \times ۳^n$$

کمترین مقدار $f(x)$ برابر است با ۲×۳^n که به ازای $x = k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$ به‌دست می‌آید.

۱۵۶. ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k}<\frac{a_1+a_2+\dots+a_k+a_{k+1}}{k+1} \qquad (1)$$

اگر جمله‌های شامل a_1 ، a_2 ، ...، a_k را از سمت راست به‌سمت چپ ببریم، نابرابری (۱) چنین می‌شود:

$$(a_1+a_2+\dots+a_k)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)<\frac{a_{k+1}}{k+1}$$

یا $\frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k}<a_{k+1}=\frac{ka_{k+1}}{k}$ که درستی آن روشن است.

بنابراین، واسطهٔ حسابی

$$S_k=\frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k}$$

از k جملهٔ اول دنبالهٔ صعودی (a_n)، تابعی است صعودی نسبت به k. بنابراین، برای $k<n$ داریم: $S_k<S_n$. و این، همان نابرابری سمت چپ مورد نظر است.

برای اثبات نابرابری دوم، دنبالهٔ صعودی

$$-a_n ، -a_{n-1} ،\dots، -a_1$$

را درنظر می‌گیریم. بنابر آن‌چه ثابت‌کردیم، باید داشته باشیم:

$$\frac{(-a_n)+(-a_{n-1})+\dots+(-a_{k+1})}{n-k}<$$

$$<\frac{(-a_n)+(-a_{n-1})+\dots+(-a_1)}{n}$$

که از آن‌جا، درستی نابرابری دوم نتیجه می‌شود.

۱۵۷. چون عبارت‌های فرض، نسبت به x و y و z متقارن‌اند، بدون این‌که به‌کلی بودن‌مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان‌فرض‌کرد: $x\leqslant y\leqslant z$. دراین صورت، نابرابری مورد نظر (که باید ثابت شود) به‌این صورت در می‌آید:

$$z-x \leqslant \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz}$$

که بعد از مجذور کردن دو طرف و تبدیل عبارت سمت راست، به این صورت در می‌آید:

$$9(z-x)^2 \leqslant 8[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$$

و یا
$$(z-x)^2 \leqslant 8[(x-y)^2+(y-z)^2] \quad (*)$$

روشن است که برای هر دو عدد حقیقی m و n داریم:

$$2(m^2+n^2) \geqslant (m+n)^2$$

اگر فرض کنیم: $m=x-y$ و $n=y-z$، به‌دست می‌آید:

$$(z-x)^2 \leqslant 2[(x-y)^2+(y-z)^2]$$

که از آن‌جا، نابرابری مطلوب نتیجه می‌شود. علامت برابری $x=y=z$ است.

۱۵۸. چون $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$، $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ و $\sin\frac{\alpha}{2}>0$

با ساده‌کردن دوطرف نابرابری به $2\sin\frac{\alpha}{2}$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{2}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2} < 1+\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

چون $\frac{2}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} < 1$ و $\cos\frac{\alpha}{2} > \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$، نابرابری اخیر درست است.

۱۵۹. اگر عدد ۱ را به دوطرف نابرابری مفروض اضافه کنیم، به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{2}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}\right)$$

و یا

$$(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)^2\geqslant 4\sin^2\alpha\,\sin^2\beta \Longrightarrow (\sin^2\alpha-\sin^2\beta)^2\geqslant 0$$

۱۶۰. به‌ترتیب داریم:

$$y=(x-2)(x-5)(x-1)(x-6)+9=$$

$$=(x^2-7x+10)(x^2-7x+6)+9=(x^2-7x)^2$$

$$+16(x^2-7x)+69=(x^2-7x+8)^2+5\geqslant 5$$

حداقل مقدار y برابر است با ۵ که به ازای $x=\frac{1}{2}(7\pm\sqrt{7})$ به‌دست می‌آید.

۱۶۱. با توجه به‌فرض $x\neq\frac{\pi}{6}$ و $x\neq 0$ داریم:

$$y=\frac{3tg\,x-tg^3x}{(1-3tg^2x)tg^3x}=\frac{3-tg^2x}{(1-3tg^2x)tg^2x}\qquad\left(x\neq\frac{\pi}{6}\right)$$

که با فرض $tg^2x=z$، به‌این معادله می‌رسیم:

$$3yz^2-(y+1)z+3=0$$

این معادله، وقتی ریشه‌های حقیقی دارد که داشته باشیم:

$$(y+1)^2-36y\geqslant 0 \Longrightarrow y\geqslant 17+12\sqrt{2} \text{ یا } y\leqslant 17-12\sqrt{2}$$

بنابراین $y_{max}=17-12\sqrt{2}$ که به‌ازای $z=3+2\sqrt{2}$ یا $x=\frac{3\pi}{8}$ به‌دست می‌آید؛ و $y_{min}=17+12\sqrt{2}$ (به ازای $z=3-2\sqrt{2}$ یا $x=\frac{\pi}{8}$).

یادداشت. توجه کنید، در این مسأله، با نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم در روی نمودار تابع، یعنی با ماکزیمم و می‌نیمم نسبی تابع سروکار داشتیم، نه با حداکثر و حداقل مقدار آن. روشن است، اگر $x\to\frac{\pi}{6}^-$، آن‌وقت $y\to+\infty$

و اگر $x \to \frac{\pi^+}{6}$، آن وقت $y \to -\infty$؛ درواقع، نمودار تابع، در بازهٔ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ دارای خط راست مجانب $\frac{\pi}{6}$ است.

۱۶۲. ۱) فرض می‌کنیم: $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = z$. داریم:

$$z=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]\cos\gamma=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\cos^2\gamma+\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma\right)$$

از آن‌جا

$$\cos^2\gamma-\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma+2z=0$$

این‌معادله، باید نسبت به‌مجهول $\cos\gamma$، ریشه‌های حقیقی داشته باشد، یعنی

$$\cos^2(\alpha-\beta)-8z\geqslant 0 \Longrightarrow z\leqslant\frac{1}{8}\cos^2(\alpha-\beta)\leqslant\frac{1}{8}$$

۲) با استفاده از نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی و، سپس، نابرابری همین مسأله دربخش ۱) داریم:

$$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}=6$$

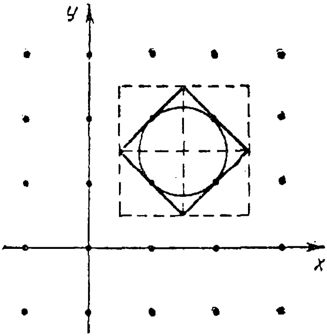
۳) به‌ترتیب داریم:

$$tg^2\alpha+tg^2\beta+tg^2\gamma=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta}+\frac{1-\cos^2\gamma}{\cos^2\gamma}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}-3\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma}}-3\geqslant$$

$$\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2}}-3=9$$

(از نابرابری $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}$ استفاده کردیم).



شکل ۲۵

۱۶۳. درصورت مسأله، در این باره سکوت شده است که، آیا نقطه‌های با مختصات درست می‌توانند روی محیط مربع قرار گیرند یا نه! اگر این نقطه‌ها نتوانند روی محیط مربع باشند، آن وقت نمی‌توان مربعی با مساحت حداکثر پیدا کرد: اگر مربعی را در نظر بگیریم که در درون آن و روی محیط آن، نقطه‌ای از نقطه‌های نشان‌دار، واقع نباشد، همیشه می‌توان مربع دیگری در نظر گرفت که، ولو به‌مقداری اندك، از آن بزرگتر و، در نتیجه، مساحتی بیشتر داشته باشد.

بنابراین به‌حالتی می‌پردازیم که، مربع مجهول بتواند، نقطه‌های با مختصات درست را، روی محیط خود داشته باشد. قبل از حل، یادآوری می‌کنیم، مربعی که درشکل ۲۵ نشان داده شده است، مساحتی برابر ۲ دارد و دایرهٔ محاطی این مربع، به‌شعاع $\frac{d}{2}$ است (d، طول ضلع مربع). به‌این ترتیب، حداکثرمساحت مربع، از ۲ کمتر نیست.

ازطرف دیگر، اگرمربعی با مساحت بیشتر از ۲ وجود داشته باشد، به معنای آن است که باید دایره‌ای پیدا شود که درون خود شامل نقطه‌های نشان‌دار نباشد وفاصلهٔ مرکز آن ازهمهٔ نقطه‌های نشان‌دار، بزرگتر از $\frac{d}{2}$ باشد، که ممکن نیست.

۱۶۴. ۱) به‌ازای $n=5$ داریم: $2^5 = 32 > 5^2 = 25$.

اکنون فرض می‌کنیم، برای $n=k+4$ $(k\in\mathbf{N})$ داشته باشیم:

$$2^{k+4} > (k+4)^2 = k^2 + 8k + 16$$

دراین صورت داریم:

$$2^{k+5}=2^{k+4}\cdot 2>(k^2+8k+16)\cdot 2=2k^2+16k+32>$$
$$>k^2+10k+25=(k+5)^2$$

۲) به‌ازای $n=10$ داریم: $10^3=1000<1024=2^{10}$.

فرض می‌کنیم، به‌ازای $n=k+9$ $(k\in\mathbf{N})$ داشته باشیم:

$$2^{k+9}>(k+9)^3=k^3+27k^2+243k+729$$

دراین صورت داریم:

$$2^{k+10}=2^{k+9}\cdot 2>(k^3+27k^2+243k+729)\cdot 2=$$
$$=2k^3+54k^2+486k+1458>k^3+30k^2+300k+$$
$$+1000=(k+10)^3$$

۳) به‌ازای $n=2$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}>\frac{1+1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

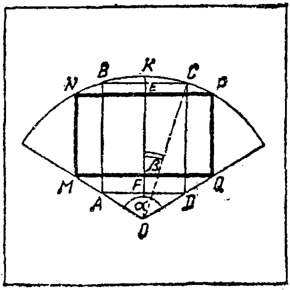
اکنون فرض می‌کنیم، به‌ازای $n=k+1$ $(k\in\mathbf{N})$ داشته باشیم:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

دراین صورت خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{\sqrt{k+2}}>\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k+2}+1}{\sqrt{k+2}}>\frac{\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+2}}=$$
$$=\frac{k+2}{\sqrt{k+2}}=\sqrt{k+2}$$

۱۶۵. حالت اول: $0° < \alpha \leqslant 180°$.



شکل ۲۶

$ABCD$ را مستطیل محاط در قطاع می‌گیریم (شکل ۲۶). زاویهٔ بین OK ــ نیمساز زاویهٔ مرکزی قطاع ــ و شعاع OC را β می‌نامیم:

$$0° < \beta < \frac{1}{2}\alpha \leqslant 90°$$

اگر مساحت مستطیل $ABCD$ را S بنامیم، داریم:

$$S = |BC| \cdot |CD| = 2|EC| \cdot |EF| = 2R\sin\beta \cdot |EF| =$$

$$= 2R\sin\beta\,(|OE| - |OF|) = 2R\sin\beta\,(R\cos\beta - |OF|)$$

ولی درمثلث OFD داریم:

$$|OF| = |FD| \cdot \cot g\frac{\alpha}{2} = |EC| \cdot \cot g\frac{\alpha}{2} = R\sin\beta \cdot \cot g\frac{\alpha}{2}$$

بنابراین، برای مساحت مستطیل $ABCD$ به‌دست می‌آید:

$$S = 2R\left(\sin\beta \cdot R \cdot \cos\beta - R\sin^2\beta \cot g\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= R^2\left(\sin 2\beta - 2\sin^2\beta \cot g\frac{\alpha}{2}\right)$$

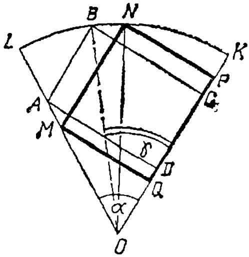
S را به‌عنوان تابعی از β درنظرمی‌گیریم و نقطه‌های بحرانی آن را جست‌وجو می‌کنیم:

$$S'(\beta) = R^2\left(2\cos 2\beta - 2\sin 2\beta \cot g\frac{\alpha}{2}\right)$$

اگر $S'(\beta) = 0$، آن وقت $\cot g 2\beta = \cot g\frac{\alpha}{2}$، یعنی $\beta = \frac{\alpha}{4}$. به سادگی می‌توان روشن کرد که $S(\beta)$ دراین نقطه، به‌حداکثرمقدارخود می‌رسد:

$$S_1 = \max_{[0°, \frac{\alpha}{2}]} S(\beta) = S\left(\frac{\alpha}{4}\right) = R^2 tg\,\frac{\alpha}{4} \qquad (1)$$

به‌این‌ترتیب، بیشترین مساحت را مستطیلی دارد که دورأس آن بر کمان قطاع، به نحوی واقع باشد که همراه با زاویهٔ مرکزی قطاع، کمان را به ۴ بخش برابر تقسیم کرده باشند (مستطیل $MNPQ$ را روی شکل ۲۶ ببینید). این نتیجه به ما امکان می‌دهد که مستطیل مورد نظر را، به‌کمک خط‌کش و پرگار رسم کنیم.



شکل ۲۷

حالت دوم: $0^\circ < \alpha \leqslant 90^\circ$.

$ABCD$ را مستطیل محاط در قطاع می‌گیریم (شکل ۲۷). زاویهٔ بین شعاع‌های OB و OK را γ می‌نامیم ($0^\circ < \gamma \leqslant 90^\circ$). دراین‌صورت، برای مساحت مستطیل داریم:

$$S = S(\gamma) = |BC| \cdot |AB| = R\sin\gamma \cdot |AB|$$

ولی $\widehat{AOB} = \alpha - \gamma$، $\widehat{BAO} = 180^\circ - \alpha$؛ بنابراین درمثلث ABO

$$\frac{|AB|}{\sin(\alpha - \gamma)} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \alpha)} \Longrightarrow |AB| = \frac{R\sin(\alpha - \gamma)}{\sin\alpha}$$

به‌این ترتیب: $S(\gamma) = \dfrac{R^2 \sin\gamma \sin(\alpha - \gamma)}{\sin\alpha}$.

ابتدا نقطه‌های بحرانی $S(\gamma)$ را در بازهٔ $[0^\circ, \alpha]$ پیدا می‌کنیم:

$$S'(\gamma) = \frac{R^2}{\sin\alpha}[\cos\gamma\sin(\alpha - \gamma) - \sin\gamma\cos(\alpha - \gamma)] =$$

$$= \frac{R^2}{\sin\alpha}\sin(\alpha - 2\gamma)$$

که به ازای $\sin(\alpha - 2\gamma) = 0$ برابر صفر می‌شود؛ یعنی $\gamma = \dfrac{\alpha}{2}$. به سادگی

ثابت می‌شود که مقدار $S(\gamma)$ به ازای $\gamma = \dfrac{\alpha}{2}$، حداکثر مقدار ممکن است:

$$S_2 = \max_{[0^\circ, \alpha]} S(\gamma) = S\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} R^2 tg \frac{\alpha}{2} \qquad (2)$$

نتیجهٔ این حالت هم جالب است: از مستطیل‌های محاط درقطاع (به‌طریقی‌که بررسی‌کردیم)، حداکثرمساحت متعلق به مستطیلی است‌که رأسی‌در وسط‌کمان قطاع داشته باشد (مستطیل $MNPQ$ را در شکل ۲۷ ببینید). در این حالت هم، می‌توان مستطیل مورد نظر را، به‌کمك خط‌کش و پرگار رسم کرد.

هنوز مطلبی مانده است‌که باید روشن‌کنیم: درحالتی‌که زاویهٔ مرکزی قطاع دربازهٔ $[0^\circ, 90^\circ]$ است، کدامیك ازدوحالت مستطیل محاطی، حداکثر مساحت را می‌دهد؟ باید مقدارهای S_1 و S_2 را در برابری (۱) و (۲) با هم مقایسه‌کنیم.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R^2 tg \frac{\alpha}{4}}{\frac{1}{2} R^2 tg \frac{\alpha}{2}} = tg\frac{\alpha}{4} : \frac{tg\frac{\alpha}{4}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{4}} = 1 - tg^2\frac{\alpha}{4} < 1$$

یعنی $S_1 < S_2$. به‌این ترتیب، سرانجام می‌توان این‌طور نتیجه‌گیری کرد:

اگر برای زاویهٔ مرکزی قطاع داشته باشیم: $0 < \alpha \leqslant 90^\circ$، آن وقت حداکثرمساحت برای مستطیلی است‌که یك ضلع آن روی شعاع دایره ویك رأس آن در وسط کمان قطاع باشد؛ در حالت $90^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$، حداکثر مساحت، متعلق به مستطیلی است که ضلع آن موازی با وتر قطاع باشد و رأس‌های آن، دونیمهٔ کمان قطاع را نصف کرده باشند.

۱۶۶. c را کوچکترین ضلع می‌گیریم (می‌توانستیم، به جای c، یکی از دوضلع دیگر، یعنی a یا b راکوچکترین ضلع بگیریم؛ روش‌کار تفاوتی نداشت). فرض می‌کنیم:

$$a - c = \alpha, \quad b - c = \beta \quad (\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0)$$

مقدار عبارت سمت چپ نابرابری فرض را A می‌نامیم، دراین‌صورت می‌توانیم عبارت A را، بر حسب c و α و β بنویسیم و، سپس، نسبت به c

منظم کنیم:

$$A=(c+\alpha)^{2}(c+\beta)(\alpha-\beta)+(c+\beta)^{2}c\beta+c^{2}(c+\alpha)(-\alpha)=$$
$$=(\alpha^{2}+\beta^{2}-\alpha\beta)c^{2}+(\alpha^{3}+\beta^{3}+\alpha^{2}\beta-2\alpha\beta^{2})c+\alpha^{2}\beta(\alpha-\beta)$$

این عبارت در حالت $\beta\geqslant\alpha$ غیرمنفی است، زیرا

$$\alpha^{2}+\beta^{2}-\alpha\beta=(\alpha-\beta)^{2}+\alpha\beta،$$
$$\alpha^{3}+\beta^{3}+\alpha^{2}\beta-2\alpha\beta^{2}=\alpha^{3}+\beta(\alpha-\beta)^{2}$$

و روشن است وقتی برابر صفر می‌شود که داشته باشیم:

$$\alpha^{2}+\beta^{2}-\alpha\beta=0 ، \alpha^{3}+\beta^{3}+\alpha^{2}\beta-2\alpha\beta^{2}=0 ، \alpha^{2}\beta(\alpha-\beta)=0$$

که تنها در حالت $\alpha=\beta=0$، یعنی $a=b=c$ (مثلث متساوی‌الاضلاع) ممکن است.

اکنون فرض می‌کنیم $\alpha<\beta$. از نابرابری $b<a+c$، بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$\beta<c+\alpha \Longrightarrow \alpha-\beta>-c \text{ و } c>\beta-\alpha$$

با توجه به دو نابرابری اخیر، مقدار A را، به این صورت می‌نویسیم:

$$A=(\alpha-\beta)^{2}c^{2}+\alpha\beta c.c+(\alpha^{3}+\beta^{3}+\alpha^{2}\beta-2\alpha\beta^{2})c+$$
$$+\alpha^{2}\beta(\alpha-\beta)\geqslant(\alpha-\beta)^{2}c^{2}+\alpha\beta(\beta-\alpha)c+(\alpha^{3}+\beta^{3}+\alpha^{2}\beta-$$
$$-2\alpha\beta^{2})c-\alpha^{2}\beta c=(\alpha-\beta)^{2}c^{2}+(\alpha^{3}+\beta^{3}-\alpha^{2}\beta-\alpha\beta^{2})c=$$
$$=(\alpha-\beta)^{2}c^{2}+(\beta^{2}-\alpha^{2})(\beta-\alpha)>0$$

۱۶۷. اگر طول ضلع‌های چهارضلعی را a، b، c و d بگیریم، وقتی که چهارضلعی، درعین حال، محیطی ومحاطی باشد، برای مساحت آن داریم: $S=\sqrt{abcd}$ (چرا؟). بنا بر این، با توجه به نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی، می‌توان نوشت:

$$\frac{p}{2}=\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}=\sqrt{S}\Longrightarrow p^{2}\geqslant 4S$$

یادداشت: می‌توان ثابت کرد که، نابرابری $4S \leqslant p^2$، دربارهٔ هرچهار-ضلعی دلخواه درست است (چگونه؟).

۱۶۸. ابتدا یك اتحاد و یك نابرابری را درمثلث ثابت می‌کنیم:

$$tg\frac{\alpha}{2}(\sin\beta+\sin\gamma)=\cos\beta+\cos\gamma \qquad (1)$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{1}{2}\left(tg\frac{\alpha}{2}\sin\beta+tg\frac{\beta}{2}\sin\alpha\right) \qquad (2)$$

برای اثبات اتحاد (۱)، به‌ترتیب داریم:

$$tg\frac{\alpha}{2}(\sin\beta+\sin\gamma)=2\cot g\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\cos\beta+\cos\gamma$$

وبرای اثبات نابرابری (۲)

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{tg\frac{\alpha}{2}\sin\beta\, tg\frac{\beta}{2}\sin\alpha}\leqslant\frac{1}{2}\left(tg\frac{\alpha}{2}\sin\beta+tg\frac{\beta}{2}\sin\alpha\right)$$

اکنون، بااستفاده از اتحاد (۱) و نابرابری (۲)، و رابطه‌های مشابه آن‌ها درمثلث، داریم:

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}+$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

$$+\frac{1}{2}\left(tg\frac{\alpha}{2}\sin\beta+tg\frac{\beta}{2}\sin\alpha+tg\frac{\beta}{2}\sin\gamma+tg\frac{\gamma}{2}\sin\beta+tg\frac{\gamma}{2}\sin\alpha+\right.$$

$$\left.+tg\frac{\alpha}{2}\sin\gamma\right)=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}tg\frac{\alpha}{2}(\sin\beta+\sin\gamma)+$$

$$+\frac{1}{2}tg\frac{\beta}{2}(\sin\alpha+\sin\gamma)+\frac{1}{2}tg\frac{\gamma}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin^2\frac{\alpha}{2}+$$

$$+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=$$

$$=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

۱۶۹. با توجه به‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی داریم:

$$2^{\sin x}+2^{tg x}\geqslant 2\sqrt{2^{\sin x+tg x}}$$

وبنابراین، نابرابری مفروض را، در بازهٔ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$، می‌توان این طور نوشت:

$$2\sqrt{2^{\sin x+tg x}}\geqslant 2^{x+1}\Longrightarrow f(x)=\sin x+tg x-2x\geqslant 0$$

برای $f'(x)$، مشتق $f(x)$ داریم:

$$f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2>\cos x+\frac{1}{\cos x}-2>0$$

زیرا اولاً $\frac{1}{\cos^2 x}>\frac{1}{\cos x}$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ وثانیاً برای مقدارمثبت $\cos x\neq 1$ داریم: $\cos x+\frac{1}{\cos x}>2$. به‌این ترتیب $f(x)$، در بازهٔ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ صعودی است و چون $f(0)=0$، پس برای هر $0<x<\frac{\pi}{2}$ باید داشته باشیم $f(x)>0$. علامت برابری، تنها برای $x=0$ است واگر $x\neq 0$، نابرابری به‌صورت اکید خود برقراراست.

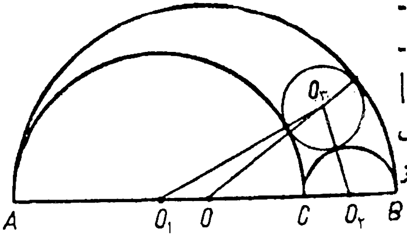
۱۷۰. برای $b>a>0$ و $k>0$ داریم: $\frac{b}{a}>\frac{b+k}{a+k}$ (پیش قضیه را درحل تمرین ۲، صفحهٔ ۱۴۱ ببینید). بنا براین، با توجه به‌ویژگی‌های لگاریتم، می‌توان نوشت:

$$log_a\frac{b}{a} > log_a\frac{b+k}{a+k} > log_{a+k}\frac{b+k}{a+k}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$log_a b-1 > log_{a+k}(b+k)-1 \Longrightarrow log_a b > log_{a+k}(b+k)$$

۱۷۱. O، O_1 و O_2 را، به‌ترتیب، مرکز نیم دایره‌های به‌قطرهای $|AB|$، $|AC|$ و $|CB|$ می‌گیریم (شکل ۲۸). دایرهٔ مماس بر این سه نیم‌دایره را رسم ومرکز آن را O_3 می‌نامیم.



شکل ۲۸

درهندسهٔ مسطحه، قضیه‌ای داریم، به‌نام قضیهٔ ستوارت* که بنابر آن: اگر D راروی ضلع BC ازمثلث ABC (درهر نقطهٔ دلخواه آن) بگیریم، آن وقت برابری زیر برقرار است:

$$|AD|^2\cdot|BC| = |AB|^2\cdot|CD| + |AC|^2\cdot|BD| - \\ -|BC|\cdot|BD|\cdot|CD|$$

اکنون، اگر قضیهٔ ستووارت رادرمثلث $O_1O_2O_3$ درنظر بگیریم، داریم:

$$|O_3O|^2\cdot|O_1O_2| = |O_1O_3|^2\cdot|OO_2| + |O_2O_3|^2\cdot|OO_1| - \\ -|OO_1|\cdot|OO_2|\cdot|O_1O_2|$$

ازطرف دیگر، روشن است که (x و y، به‌ترتیب، شعاع دایره‌های به مرکزهای O_1 و O_2):

$$|O_3O| = x+y-R, |O_1O_2| = x+y, |O_1O_3| = x+R, \\ |O_2O_3| = y+R$$

---

*) ستووارت (*M. Stuart*)، ریاضی‌دان انگلیسی سدهٔ ۱۸، برای نخستین‌بار، این‌قضیه را در کتاب خود «برخی قضیه‌های عمومی» (سال ۱۷۴۶، ادین‌بورو) ثابت کرد. از این قضیه، می‌توان برای، محاسبهٔ طول میانه یا نیمساز درمثلث، استفاده کرد.

بنابراین، رابطهٔ ستووارت، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(x+y-R)^{۲}(x+y)=(x+R)^{۲}\cdot x+(y+R)^{۲}\cdot y-xy(x+y)$$

از آن جا $R=\dfrac{xy(x+y)}{x^{۲}+xy+y^{۲}}$. چون $x^{۲}+y^{۲}\geqslant ۲xy$، بنابراین

$$R\leqslant\frac{xy(x+y)}{۳xy}=\frac{x+y}{۳}=\frac{۱}{۶}|AB|$$

۱۷۲. یك مثلث نمی‌تواند دو زاویهٔ منفرجه داشته باشد، بنابراین

$\hat{A}<۹۰^{\circ}$، $\hat{B}<۹۰^{\circ}$ و $tg\hat{A}$ و $tg\hat{B}$ هر دو مثبت‌اند. درضمن

$$tg\hat{A}tg\hat{B}=\frac{\sin\hat{A}\sin\hat{B}}{\cos\hat{A}\cos\hat{B}}<۱\Longrightarrow\cos(\hat{B}+\hat{A})<۰$$

یعنی $\cos\hat{C}>۰$ و $\hat{C}<۹۰^{\circ}$. با همین روش می‌توان عکس قضیه را هم ثابت کرد.

۱۷۳. از نابرابری بین واسطه های حسابی و هندسی، دو بار استفاده می‌کنیم؛ در ضمن، توجه داشته باشید که: $n\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{n^{n+۱}}$، $n\sqrt[n+۱]{n}=\sqrt[n+۱]{n^{n+۲}}$ وغیره:

$$\sqrt[n]{n}+\sqrt[n+۱]{n}+\dots+\sqrt[۲n-۱]{n}=$$

$$=\frac{\sqrt[n]{n^{n+۱}}+\sqrt[n+۱]{n^{n+۲}}+\dots+\sqrt[۲n-۱]{n^{۲n}}}{n}\geqslant$$

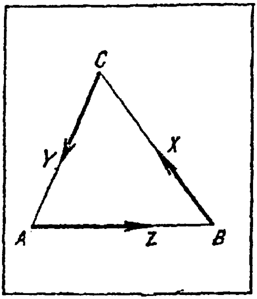
$$\geqslant\left(\sqrt[n]{n^{n+۱}}\cdot\sqrt[n+۱]{n^{n+۲}}\dots\sqrt[۲n-۱]{n^{۲n}}\right)^{\frac{۱}{n}}=\left(n^{\frac{n+۱}{n}+\frac{n+۲}{n+۱}+\dots+\frac{۲n}{۲n-۱}}\right)^{\frac{۱}{n}}\geqslant$$

$$\geqslant\left(n^{\frac{n+۱}{n}\cdot\frac{n+۲}{n+۱}\dots\frac{۲n}{۲n-۱}}\right)^{\frac{۱}{n}}=(n^{۲})^{\frac{۱}{n}}=(n)^{\sqrt[n]{۲}}$$

۱۷۴. چون $\dfrac{x}{y}\geqslant\dfrac{۱}{y}\geqslant\dfrac{۱}{z}$ و $\dfrac{z}{t}\geqslant\dfrac{z}{۱۰۰}$، بنابراین

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{t}\geqslant\frac{۱}{z}+\frac{z}{۱۰۰}\geqslant۲\sqrt{\frac{۱}{z}\cdot\frac{z}{۱۰۰}}=\frac{۱}{۵}$$

حداقل مقدار $\frac{x}{y}+\frac{z}{t}$ برابراست با $\frac{1}{5}$ که به‌ازای $x=1$، $y=z=10$ و $t=100$ به‌دست می‌آید.



شکل ۲۹

۱۷۵. مثلثی با زاویه‌های α، β و γ می‌سازیم که طول ضلع‌های آن، به ترتیب، از x، y و z بزرگتر باشند (شکل ۲۹). پاره خط‌های راست BX، CY و AZ را با طول‌هایی، به‌ترتیب، برابر x، y و z، روی BC، CA و AB جدا می‌کنیم. داریم:

$$(\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{CY}+\overrightarrow{AZ})^2\geqslant 0 \qquad (1)$$

درضمن روشن است که

$$(\widehat{\overrightarrow{BX},\overrightarrow{CY}})=180^\circ-\gamma \Longrightarrow \cos(180^\circ-\gamma)=-\cos\gamma$$

ودو رابطهٔ مشابه آن. اکنون، اگر پرانتز سمت چپ رادرنابرابری (۱) بازکنیم، به‌دست می‌آید:

$$x^2+y^2+z^2-2yz\cos\alpha-2zx\cos\beta-2xy\cos\gamma\geqslant 0$$

باتوجه به (۱)، علامت نابرابری وقتی به برابری تبدیل می‌شود که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{CY}+\overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{0}$$

یعنی، وقتی به برابری می‌رسیم که، مثلث انتخابی ABC، ضلع‌هایی به طول برابر x، y و z وزاویه‌هایی برابر α، β و γ داشته باشد.

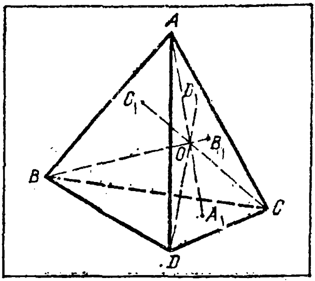
۱۷۶. روشن است که (شکل ۳۰)

$$V_{ABCD}=V_{OABC}+V_{OBCD}+V_{OCDA}+V_{ODAB}$$

درضمن می‌دانیم، حجم دوهرم باقاعده‌های هم‌ارز، به‌نسبت ارتفاع‌های دو هرم است. بنابراین

$$\frac{|OA_1|}{|AA_1|}+\frac{|OB_1|}{|BB_1|}+\frac{|OC_1|}{|CC_1|}+\frac{|OD_1|}{|DD_1|}=1$$

که به ترتیب، می‌توان آن را این‌طورنوشت:



شکل ۳۵

$$\frac{|AA_1|-R}{|AA_1|}+\frac{|BB_1|-R}{|BB_1|}+\frac{|CC_1|-R}{|CC_1|}+\frac{|DD_1|-R}{|DD_1|}=1;$$

$$\frac{1}{|AA_1|}+\frac{1}{|BB_1|}+\frac{1}{|CC_1|}+\frac{1}{|DD_1|}=\frac{3}{R}$$

ازطرف دیگر، این نابرابری واضح است (مسألهٔ ۱۱ را در داخل متن فصل دوم ببینید):

$$(|AA_1|+|BB_1|+|CC_1|+|DD_1|)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{|AA_1|}+\frac{1}{|BB_1|}+\frac{1}{|CC_1|}+\frac{1}{|DD_1|}\right)\geqslant 4^2$$

بنابراین $|AA_1|+|BB_1|+|CC_1|+|DD_1|\geqslant\frac{16}{3}R$.

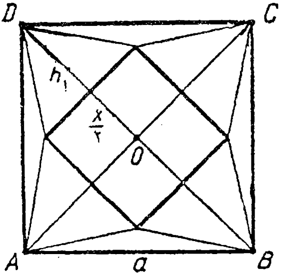
۱۷۷. به‌ترتیب داریم:

$$|a_1+2a_2+\dots+na_n|=|f'(0)|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right|\cdot\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right|\leqslant 1$$

۱۸۷. اگر از نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی استفاده‌کنیم، بلافاصله به‌دست می‌آید:

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\dots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n\sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\dots\frac{a_n}{b_n}}=n$$



شکل ۳۱

۱۷۹. طول ضلع قاعدهٔ هرم را x و طول ارتفاع آن را h می‌گیریم (شکل ۳۱). دراین‌صورت

$$h=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right)}$$

و برای حجم هرم خواهیم داشت:

$$V=\frac{1}{3}x^2h=\frac{1}{3}x^2\sqrt{\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right)}=\frac{16}{3}\sqrt{\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{4}\right)^4\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right)}$$

این حجم وقتی حداکثر می‌شود که تابع $f(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^4\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right)$ به‌ـ ماکزیمم خود برسد. روشن است که

$$f(x)=\frac{x}{4}\cdot\frac{x}{4}\cdot\frac{x}{4}\cdot\frac{x}{4}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right)$$

مجموع پنج عامل ضرب مقدار ثابتی است، بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها، وقتی به‌حداکثرخود می‌رسدکه این عامل‌ها باهم برابر باشند: $\frac{x}{4}=\frac{a}{\sqrt{2}}-x$ یا $x=\frac{2a\sqrt{2}}{5}$. به‌این ترتیب، حجم هرم، وقتی حداکثرمقدارممکن است که طول ضلع قاعدهٔ آن، برابر $\frac{2}{5}$ طول‌قطرمربع باشد ودراین‌صورت، حجم هرم برابر $\frac{8a^3}{75\sqrt{10}}$ می‌شود.

۱۸۰. داریم:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-(ab+ac+ad+ae)=$$
$$=\left(\frac{a}{2}-b\right)^2+\left(\frac{a}{2}-c\right)^2+\left(\frac{a}{2}-d\right)^2+\left(\frac{a}{2}-e\right)^2\geqslant 0$$

علامت برابری، برای $\frac{a}{2}=b=c=d=e$.

۱۸۱. به‌ترتیب داریم:

$$f(x,y,z,t)=1+\left(\frac{ax^2+by^2}{ax+by}-1\right)+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}=$$

$$=1+\frac{-axz-byt}{ax+by}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}=1+\frac{ab(z-t)(zy-xt)}{(ax+by)(az+bt)}=$$

$$=1+\frac{ab(z-t)[z(1-t)-t(1-z)]}{(ax+by)(az+bt)}=1+$$

$$+\frac{ab(z-t)^2}{(ax+by)(az+bt)}$$

عبارت اخیر نشان می‌دهد که، حداقل‌مقدار $f(x, y, z, t)$ برابر است با ۱، که به‌ازای $z=t$ به‌دست می‌آید.

از شرط‌های مسأله نتیجه می‌شود که $0 \leqslant x, y, z, t \leqslant 1$ و از آن‌جا

$$ax^2\leqslant ax \text{ ، } by^2\leqslant by \text{ ، } az^2\leqslant az \text{ ، } bt^2\leqslant bt$$

یعنی $ax^2+by^2\leqslant ax+by$ و $az^2+bt^2\leqslant az+bt$. درنتیجه

$$f(x, y, z, t)\leqslant 2$$

برابری، به‌ازای $x=t=0$ و $y=z=1$ به‌دست می‌آید.

پاسخ. $1\leqslant f(x, y, z, t)\leqslant 2$.

۱۸۲. $y=-x$ می‌گیریم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$y^{37}-y^8-1=0 \qquad (1)$$

اگر $y\leqslant 1$، آن وقت $f(y)=y^{37}-y^8-1<0$، یعنی $f(y)=0$، برای $y\leqslant 1$ ریشه‌ای ندارد. $y>1$ می‌گیریم. داریم:

$$f(y)+1=y^{37}-y^8=y^8(y^{29}-1)$$

که برابر است با حاصل‌ضرب دو تابع صعودی مثبت، در بازهٔ $y>1$؛ یعنی تابع $f(y)$ تابعی یکنوا (یا صعودی و یا نزولی) است و معادلهٔ (۱) نمی‌تواند

بیش از یك ریشه داشته باشد. ازطرف دیگر، معادلهٔ مفروض درجه‌ای فرد دارد ومی‌دانیم، هرمعادلهٔ ازدرجهٔ فرد، دست‌کم یك ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۸۳. برای‌این‌که عدد $۴ab+۲۲a+۴۷b$ بر $a^۲+۷b^۲+۸۱۱$ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم:

$$۴ab+۲۲a+۴۷b \geqslant a^۲+۷b^۲+۸۱۱$$

$$a^۲-۲(۲b+۱۱)a+۷b^۲-۴۷b+۸۱۱ \geqslant ۰ \qquad (۱)$$

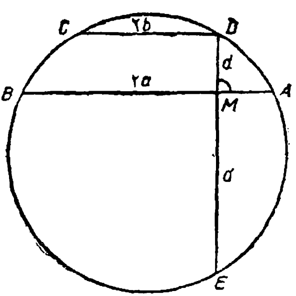
و برای این‌که، سه جمله‌ای درجه دوم سمت چپ نابرابری، ریشه‌های حقیقی داشته باشد:

$$-۳b^۲+۹۱b-۶۹۰ \geqslant ۰ \Longrightarrow ۱۵ \leqslant b \leqslant ۱۵\frac{۱}{۳}$$

چون b عددی طبیعی است، پس $b=۱۵$، از آن‌جا $a=۴۱$. به‌ازای این مقدارهای a و b، نابرابری (۱) به‌برابری تبدیل می‌شود ودرنتیجه:

$$۴ab+۲۲a+۴۷b=a^۲+۷b^۲+۸۱۱$$

۱۸۴. راه حل اول.



شکل ۳۲

$|AD|>|CD|$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم وتر DE در نقطهٔ M بر وتر AB عمود باشد (شکل ۳۲). طبق فرض $|AB|=۲a$، $|CD|=۲b$ و $|DM|=d$؛ بنابراین

$$|AM|=\frac{۱}{۲}(|AB|-|CD|)=$$

$$=a-b\ ;\ |BM|=a+b$$

چون $|AM|\cdot|MB|=|DM|\cdot|EM|$؛ پس با فرض $|EM|=d'$

$$d\cdot d'=a^۲-b^۲$$

اگر وترهای AB و CD در یك طرف مرکز دایره باشند، باید داشته باشیم:

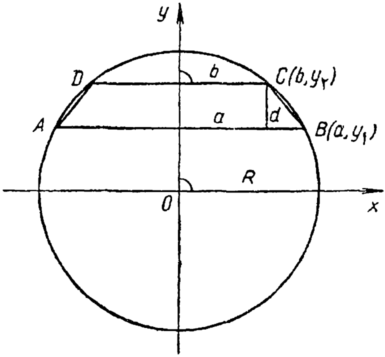
$$d<d' \text{ و } d^۲<a^۲-b^۲ \quad (a>b)$$

واگر وترهای AB و CD دردوطرف مختلف مرکز دایره باشند:

$$d>d' \text{ و } d^2>a^2-b^2 \quad (a>b)$$

عکس قضیه هم درست است: به‌ازای $a>b$، از برابری $d \cdot d' = a^2-b^2$ ونابرابری $d^2<a^2-b^2$ نتیجه می‌شود $d<d'$؛ و ازهمان برابری ونابرابری $d^2>a^2-b^2$ به‌دست می‌آید: $d>d'$.

راه‌حل دوم. مبداء مختصات را درمرکز دایره ومحور طول را موازی باوترهای AB و CD درنظر می‌گیریم (شکل ۳۳).



شکل ۳۳

فرض می‌کنیم: $B(a, y_1)$ و $C(b, y_2)$. طبق فرض $|y_2-y_1|=d$؛ به جز آن، نقطه‌های B و C به‌دایرهٔ مفروض تعلق دارند:

$$a^2+y_1^2=b^2+y_2^2=R^2$$

وازآن‌جا

$$a^2-b^2=y_2^2-y_1^2 \text{ ، } |a^2-b^2|=|y_2-y_1| \cdot |y_2+y_1|$$

یعنی $|y_2+y_1|=\dfrac{|a^2-b^2|}{d}$.

برای این‌که مرکز دایره، درداخل ذوزنقه $ABCD$ باشد، لازم وکافی است که y_1 و y_2، علامت‌های متفاوتی داشته باشند. دراین حالت

$$|y_2+y_1|<|y_2-y_1|=d$$

یعنی $|a^2-b^2|<d^2$.

درحالتی‌که مرکزدایره دربیرون ذوزنقهٔ $ABCD$ قرارگیرد، y_1 و y_2 هم علامت‌اند و

$$|y_2+y_1|>|y_2-y_1|$$

یعنی $|a^2-b^2|>d^2$.

۱۸۵. با توجه به نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی (برای $a+b$ عدد مثبت) داریم:

$$2\sqrt[a+b]{a^{2b}\,b^{2a}}=2\sqrt[a+b]{\underbrace{a^2a^2\ldots a^2}_{b\ \text{مرتبه}}\cdot\underbrace{b^2b^2\ldots b^2}_{a\ \text{مرتبه}}}\leqslant$$

$$\leqslant 2\times\frac{\overbrace{a^2+a^2+\ldots+a^2}^{b\ \text{مرتبه}}+\overbrace{b^2+b^2+\ldots+b^2}^{a\ \text{مرتبه}}}{a+b}=$$

$$=\frac{2(a^2b+ab^2)}{a+b}=2ab\leqslant a^2+b^2$$

یادداشت. شرط طبیعی بودن دو عدد a و b لازم نیست؛ کافی است دو عدد a و b مثبت باشند.

برای دوعدد مثبت a و b، همیشه داریم $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\geqslant 1$. در واقع، اگر $a>b$، آن وقت $\frac{a}{b}>1$ و $a-b>0$؛ واگر $a<b$، آن وقت $\frac{a}{b}<1$ و $a-b<0$؛ و در هر دو حالت $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$. سپس داریم:

$$a^2+b^2\geqslant 2ab=2\sqrt[a+b]{a^{a+b}\cdot b^{a+b}}=2\sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}}$$

۱۸۶. اگر M_0 را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC بگیریم، می‌دانیم

$$a\overrightarrow{M_0A}+b\overrightarrow{M_0B}+c\overrightarrow{M_0C}=\overrightarrow{0}$$

گزارهٔ عکس هم درست است. بنابراین، برای هر نقطهٔ M از فضا، به شرطی

که بر M_0 منطبق نباشد

$$a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=\mathbf{s}\neq 0$$

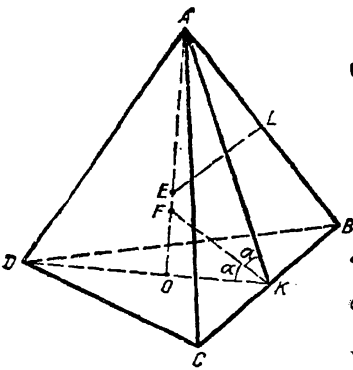
در نتیجه $\mathbf{s}^2=(a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC})^2\geqslant 0$ که بعد از باز کردن پرانتز

$$a^2a_1^2+b^2b_1^2+c^2c_1^2+ab(a_1^2+b_1^2-c_1^2)+bc(b_1^2+c_1^2-a_1^2)+$$
$$+ca(c_1^2+a_1^2-b_1^2)\geqslant 0\ ;$$
$$a_1^2(a^2+ab+ac)+b_1^2(b^2+ba+bc)+c_1^2(c^2+ca+cb)\geqslant$$
$$\geqslant abc\cdot 2p$$

که اگر دوطرف را به $2p=a+b+c$ ساده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$aa_1^2+bb_1^2+cc_1^2\geqslant abc$$

علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که، نقطهٔ M، بر مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC منطبق باشد.



شکل ۳۴

۱۸۷. E را مرکز کرهٔ محیطی و F را مرکز کرهٔ محاطی می‌گیریم (شکل ۳۴). در این صورت

$$|AE|=R\ ،\ |OF|=r$$

زاویهٔ دووجهی بین قاعده و وجه جانبی هرم را 2α می‌نامیم و از نقطهٔ E، عمود EL را بر یال AB رسم می‌کنیم. دو مثلث ALE و AOB متشابه‌اند و

$$|AL|=\frac{1}{2}|AB|\ \text{و}$$

$$|AE|:|AL|=|AB|:|AO|\ ،\ 2|AE|\cdot|AO|=|AB|^2,$$

$$2|AE|\cdot|AO|=|AO|^2+|BO|^2 \qquad (1)$$

ولی $[KF]$ نیمساز زاویهٔ AKO است، بنابراین

$$|AO| = |KO|\, tg\,2\alpha = |OF|\, cotg\alpha\, tg\,2\alpha = r cotg\alpha\, tg\,2\alpha \quad (2)$$

چون $|BO| = 2|KO|$، پس

$$|BO| = 2|KO| = 2|OF|\, cotg\alpha = 2r cotg\alpha \qquad (3)$$

(۲) و(۳) را در (۱) قرارمی‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$2R cotg\alpha\, tg\,2\alpha = r^2 cotg^2\alpha\, tg^2 2\alpha + 4r^2 cotg^2\alpha$$

که بعدازتبدیل‌های ساده خواهیم داشت:

$$\frac{r}{R+r} = tg^2\alpha(1 - tg^2\alpha) = \frac{1}{4} - \left(tg\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$$

یعنی $4r \leqslant R+r$ یا $R \geqslant 3r$.

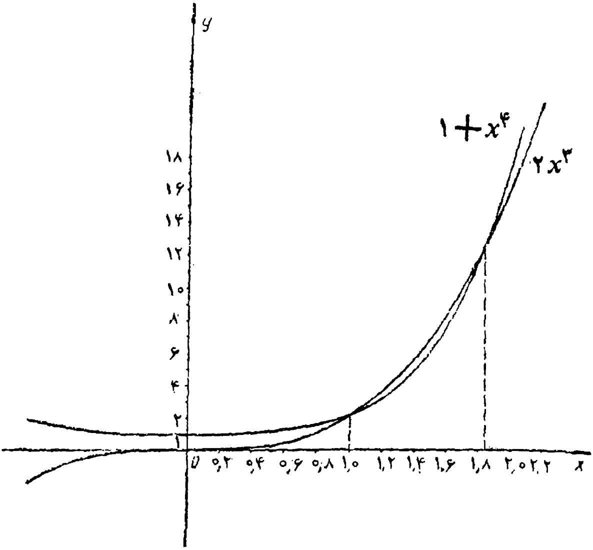
۱۸۸. فرض می‌کنیم: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = S_n$. اگر دوطرف نابرابری مورد نظر را در $n+1$ ضرب کنیم، می‌توانیم آن را به‌این‌صورت بنویسیم:

$$S_{2n} - \frac{1}{2}S_n > \frac{n+1}{2n}S_n \Longrightarrow S_{2n} - S_n > \frac{1}{2n}S_n$$

ازآن‌جا: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} + \dots + \frac{1}{2n^2}$. و این نابرابری درست است، زیرا هرجملهٔ سمت چپ، ازجملهٔ نظیر خود در سمت راست بزرگتر است.

۱۸۹. برای $ab \leqslant 0$، نابرابری برقرار است، زیرا اگر $ab < 0$، آن وقت سمت چپ نابرابری مثبت وسمت راست آن منفی می‌شود؛ درحالتی‌که تنها یکی از دومقدار a یا b صفر باشد، بازهم نابرابری برقرار است و در حالت $a = b = 0$، نابرابری به‌برابری تبدیل می‌شود.

اکنون فرض‌می‌کنیم $ab > 0$. دوطرف‌نابرابری را بر a^4 (که مقداری مثبت‌است) تقسیم می‌کنیم و $\frac{b}{a}$ را x می‌نامیم. چون a و b هم علامت‌اند، پس



شکل ۳۵

$x>0$. به این ترتیب، به نابرابری $1+x^4 \geqslant 2x^3$ می‌رسیم. نمودار تابع‌های $y=1+x^4$ و $y=2x^3$ را رسم می‌کنیم (شکل ۳۵؛ در این شکل، برای روشن‌تر بودن نقطه‌های برخورد دو منحنی، واحد محور طول را ۱۵ برابر واحد محور عرض گرفته‌ایم). علامت برابری در دو حالت پیش می‌آید: به‌ازای $x_1=1$ و به‌ازای x_2 که مقداری است بین ۱/۸ و ۱/۹. مقدار تقریبی x_2 را می‌توان محاسبه کرد: $x_2 \approx 1/84$ (اگر دقیق‌تر محاسبه کنیم، به‌دست می‌آید: $x_2 \approx 1/839237$ که، به‌ازای آن، مقدار $1+x^4$ و هم مقدار $2x^3$، به تقریب برابر ۱۲/۴۴۴۵ می‌شوند). روی شکل روشن است که، برای $x<1$ و $x>x_2$، داریم $1+x^4>2x^3$ و برای $1<x<x_2$ داریم: $1+x^4<2x^3$.

پاسخ. نابرابری $a^4+b^4 \geqslant 2ab^3$ وقتی برقرار است که: ۱) a و b علامت‌های مختلف داشته باشند؛ ۲) یکی از آن‌ها برابر صفر و دیگری دلخواه

باشد؛ ۳) $۱ \leqslant \frac{b}{a}$، یعنی $۰ < b \leqslant a$ یا $a \leqslant b < ۰$؛ ۴) $\frac{b}{a} \geqslant k$ که در آن $k \approx ۱/۸۴$، یعنی $b \geqslant ka > ۰$ یا $b \leqslant ka < ۰$.

۱۹۰. قرار می‌گذاریم: $log_{n!}n = x$ ، $log_{n!}(n-۱) = y$، $log_{n!}(n-۲)! = z$. در این صورت

$$x+y+z = log_{n!}n(n-۱)(n-۲)! = log_{n!}n! = ۱ \qquad (*)$$

اکنون بردارهای $\mathbf{a}(x, y, z)$ و $\mathbf{e}(۱, ۱, ۱)$ را درنظر می‌گیریم. بنابر $(*)$: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = ۱$ چون $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})^۲ = |\mathbf{a}|^۲ \cdot |\mathbf{e}|^۲$، پس

$$۱ \leqslant ۳(x^۲+y^۲+z^۲)$$

ولی بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{e}$ هم راستا نیستند، بنابراین $x^۲+y^۲+z^۲ > \frac{۱}{۳}$.

۱۹۱*. ضمن محاسبه، همهٔ کمان‌ها را برحسب درجه درنظر گرفته‌ایم، ولی علامت درجه را برای سهولت کار نگذاشته‌ایم. از نابرابری روشن $tg\frac{۱}{۶۴} < ۳tg\frac{۲۷}{۶۴}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{sin\frac{۱}{۶۴}}{cos\frac{۱}{۶۴}} < \frac{۳\,sin\frac{۲۹}{۶۴}}{cos\frac{۲۷}{۶۴}} \Longrightarrow sin\frac{۱}{۶۴}cos\frac{۲۷}{۶۴} < ۳\,sin\,\frac{۲۹}{۶۴}cos\frac{۱}{۶۴}$$

دوطرف نابرابری را در $۲\,sin\frac{۱}{۶۴}$ ضرب و، سپس طرف بزرگتر را به‌تفاضل دوکسینوس تبدیل می‌کنیم:

$$۳\,cos\frac{۲۷}{۶۴} - ۳\,cos\,\frac{۳۱}{۶۴} > ۴\,sin^۲\,\frac{۱}{۶۴}cos\frac{۲۷}{۶۴},$$

---

*) همهٔ محاسبه‌های این مسأله را، همکار محترم آقای محمد رضا هاشمی موسوی انجام داده‌اند.

$$3\cos\frac{31}{64}<3\cos\frac{27}{64}-4\sin^2\frac{1}{64}\cos\frac{27}{64}$$

دوباره دوطرف را در $\sin\frac{1}{64}$ ضرب می‌کنیم:

$$3\sin\frac{1}{64}\cos\frac{31}{64}<\cos\frac{27}{64}\left(3\sin\frac{1}{64}-4\sin^3\frac{1}{64}\right)=\cos\frac{27}{64}\sin\frac{3}{64}$$

که با تبدیل دوطرف به‌مجموع، به‌دست می‌آید:

$$3\sin\frac{1}{2}-3\sin\frac{15}{32}<\sin\frac{15}{32}-\sin\frac{12}{32}$$

که از آن، نابرابری اول ابوالوفا نتیجه می‌شود:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\right)^\circ<\frac{4}{3}\sin\left(\frac{15}{32}\right)^\circ-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{12}{32}\right)^\circ$$

اکنون به‌نابرابری دوم ابوالوفا می‌پردازیم. این نابرابری واضح است:

$$\cos\frac{1}{64}\sin\frac{32}{64}+\sin\frac{2}{64}\sin\frac{33}{64}>0$$

که با تبدیل به‌مجموع، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\cos\frac{31}{64}>\frac{1}{2}\left[\cos\frac{33}{64}+\cos\frac{35}{64}\right]$$

و یا

$$\cos\frac{31}{64}>\cos\frac{1}{64}\cos\frac{34}{64}$$

دوطرف را در $2\sin\frac{1}{64}$ ضرب، وسپس، به مجموع تبدیل می‌کنیم:

$$2\sin\frac{32}{64}-2\sin\frac{30}{64}>\sin\frac{36}{64}-\sin\frac{32}{64}$$

واز آن‌جا نابرابری مورد نظر به‌دست می‌آید:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\right)^\circ>\frac{2}{3}\sin\left(\frac{15}{32}\right)^\circ-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{18}{32}\right)^\circ$$

یادداشت. به‌کمک نابرابری‌های ابوالوفا، برای $sin ۳۰'$ به‌دست می‌آید:

$$۰/۰۰۸۷۲۴ < sin ۳۰' < ۰/۰۰۸۷۲۸$$

یعنی مقدار $sin ۳۰'$ تا پنج رقم بعداز ممیز برابر است با ۰/۰۰۸۷۲

۱۹۲. فرض می‌کنیم $f(x) = \sqrt{x-۲} + \sqrt{۸-۲x}$ که در بازهٔ $[۲،۴]$ معین است. داریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x-۲}} - \frac{۱}{\sqrt{۸-۲x}} = \frac{\sqrt{۸-۲x} - ۲\sqrt{x-۲}}{۲\sqrt{(x-۲)(۸-۲x)}}$$

که به‌ازای $x = \frac{۸}{۳}$ برابر صفر، به‌ازای $x < \frac{۸}{۳}$ مثبت و به‌ازای $x > \frac{۸}{۳}$ منفی است؛ یعنی تابع f در نقطهٔ $x = \frac{۸}{۳}$، در بازهٔ $(۲،۴)$ به‌ماکزیمم خود می‌رسد. چون

$$f(۲) = ۲ ،\ f(۴) = \sqrt{۲} ،\ f\left(\frac{۸}{۳}\right) = \sqrt{۶}$$

بنابراین، حداکثر مقدار f در نقطهٔ $x = \frac{۸}{۳}$ و حداقل آن در نقطهٔ $x = ۴$ به‌دست می‌آید. تابع f پیوسته است، درنتیجه، برد آن عبارت است از بازهٔ $[\sqrt{۲} ، \sqrt{۶}]$. به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، وقتی جواب دارد که داشته باشیم: $\sqrt{۲} \leqslant a \leqslant \sqrt{۶}$.

یادداشت. درحل این مسأله، از قضیه‌ای استفاده کرده‌ایم که یکی ازمهم ترین قضیه‌ها، دربارهٔ تابع‌های پیوسته است. این قضیه (قضیهٔ بولتسانو ـ کوشی) می‌گوید: اگرتابع f دربازهٔ $[a،b]$ پیوسته باشد وداشته باشیم $f(a) = A$ و $f(b) = B$ و $A < C < B$، آن وقت عدد $c \in (a،b)$ وجود دارد، به نحوی که برای آن داشته باشیم: $f(c) = C$. ولی اثبات دقیق این قضیه، از برنامهٔ دبیرستانی تجاوز می‌کند. با وجود این، می‌توان درستی آن را به‌کمک نمودار، به سادگی درک کرد و، به‌همین مناسبت، هیچ اشکالی دراستفادهٔ از آن وجود ندارد.

۱۹۳. دامنهٔ تابع f عبارت است از بازهٔ $\left[\frac{۲}{۳} ، +\infty\right)$. دربازهٔ

$\left(\frac{۲}{۳}\text{ ، }+\infty\right)$ داریم:

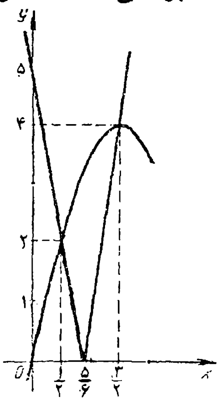
$$f'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x-۲}}-\frac{۱}{\sqrt{۲x-۱}}=\frac{۳\sqrt{۲x-۱}-۲\sqrt{۳x-۲}}{۲\sqrt{(۳x-۲)(۲x-۱)}}$$

و روشن است که برای $x>\frac{۲}{۳}$ داریم $f'(x)>۰$. تابع f در بازهٔ $\left(\frac{۲}{۳}\text{ ، }+\infty\right)$ صعودی است و، بنابراین، معادلهٔ $f(x)=۴$ نمی‌تواند بیش از یک جواب داشته باشد.

از طرف دیگر، اگر عدد «بزرگی» مثل $x=۲۰۰$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$f(۲۰۰)=\sqrt{۵۹۸}-\sqrt{۳۹۹}>۲۴-۱۹>۴$$

f، تابعی است پیوسته و چون $f(۱)=۰$، بنابراین همهٔ مقدارهای بین $f(۱)=۰$ و $f(۲۰۰)>۴$، و منجمله $f(x)=۴$ را قبول می‌کند. به این ترتیب، معادلهٔ مفروض، درست یک جواب دارد.



شکل ۳۶

۱۹۴. $f(x)=|۶x-۵|$ و

$$g(x)=۴\sin\frac{\pi}{۳}x$$

می‌گیریم. با رسم نمودارهای f و g، بلافاصله متوجه می‌شویم که، معادلهٔ مفروض، جوابی در بازهٔ $\left[۰\text{ ، }\frac{۵}{۶}\right]$ وجوابی بزرگتر از $\frac{۵}{۶}$ دارد (شکل ۳۶). صورت مسأله، به‌ما تلقین می‌کند که باید این جواب‌ها، «عددهای خوبی» باشند، زیرا در غیر این صورت، نخواهیم توانست آن‌ها را، با دقت پیدا کنیم. آزمایش مستقیم نشان می‌دهد که $x_1=\frac{۱}{۲}$ و $x_2=\frac{۳}{۲}$ و تنها این می‌ماند که ثابت کنیم، معادلهٔ مفروض، جواب دیگری ندارد. به این نکته توجه می‌کنیم که، معادلهٔ مفروض، تنها وقتی می‌تواند جواب داشته باشد که داشته باشیم:

$$|۶x-۵|\leqslant ۴ \Longrightarrow \frac{۱}{۶}\leqslant x\leqslant \frac{۳}{۲}$$

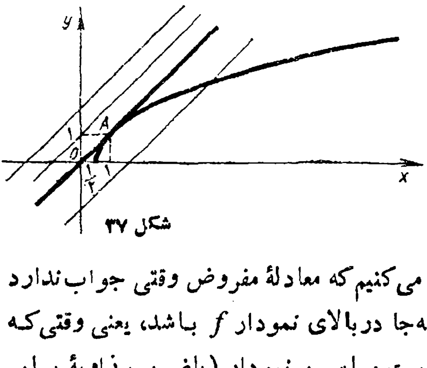
بازهٔ $\left[\frac{۱}{۶}\,,\,\frac{۳}{۲}\right]$ را به‌دو بازهٔ $\left[\frac{۱}{۶}\,,\,\frac{۵}{۶}\right]$ و $\left(\frac{۵}{۶}\,,\,\frac{۳}{۲}\right]$ تقسیم می‌کنیم.

در بازهٔ $\left[\frac{۱}{۶}\,,\,\frac{۵}{۶}\right]$ ، تابع f نزولی و تابع g صعودی است (چرا؟)، به‌نحوی که معادلهٔ $f(x)=g(x)$ نمی‌تواند بیش‌از یك‌جواب دراین بازه داشته باشد. در بازهٔ $\left(\frac{۵}{۶}\,,\,\frac{۳}{۲}\right]$ ، هردوتابع صعودی‌اند. بنابراین، اثبات منجر به‌این می‌شود که توجه‌کنیم، دراین بازه، تابع g کندتر ازتابع f ترقی می‌کند. به‌زبان دقیق‌تر $g'(x)<f'(x)$ و، درنتیجه، $f(x)-g(x)$ تابعی صعودی است. برای $x\in\left(\frac{۵}{۶}\,,\,\frac{۳}{۲}\right]$ داریم:

$$f'(x)-g'(x)=۶-\frac{۴\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۳}x\geqslant ۶-\frac{۴\pi}{۳}>۰$$

بنابراین، $f-g$ تابعی صعودی است. بنابراین، حداکثر مقدارخود را در انتهای سمت راست بازهٔ مورد نظر پیدا می‌کند:

$$h_{max}=h\left(\frac{۳}{۲}\right)=۰$$

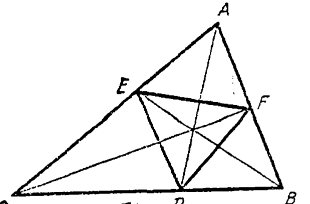


شکل ۳۷

به نحوی که در بازهٔ $\left(\frac{۵}{۶}\,,\,\frac{۳}{۲}\right)$ ، داریم $h(x)<۰$ ، یعنی $f(x)<g(x)$ و معادلهٔ اصلی، جوابی دراین بازه ندارد.

۱۹۵. نمودار تابع $y=\sqrt{۲x-۱}$ را رسم و توجه می‌کنیم که معادلهٔ مفروض وقتی جواب ندارد که خط راست $y=x+a$ ، همه‌جا دربالای نمودار f باشد، یعنی وقتی‌که این خط راست دربالای خط راست مماس برنمودار (باضریب زاویهٔ برابر ۱) قرارگیرد. بنابراین، مسأله به‌این‌جا منجرمی‌شود که مماسی باضریب زاویهٔ

واحد برمنحنی نمودار رسم‌کنیم. معادلهٔ این مماس $x=y$ ومختصات نقطهٔ تماس، $A(۱،۱)$ می‌شود؛ این خط راست متناظر است با مقدار $a=۰$.



شکل ۳۸

به‌این ترتیب، نامعادلهٔ مفروض، برای $a\leqslant ۰$ جواب دارد.

۱۹۶. باتوجه به‌شکل۳۸داریم:

$$S_{DEF}=S_{ABC}-S_{AFE}-$$
$$-S_{BDF}-S_{CED} \qquad (۱)$$

ازطرف دیگر: $S_{AFE}=\frac{|AE|\cdot|AF|\cdot\sin\hat{A}}{۲}$. فرض‌می‌کنیم $a=|BC|$، $b=|AC|$، $c=|AB|$. با توجه به‌ویژگی نیمساز داخلی مثلث:

$$|AE|=\frac{bc}{a+c}\ ،\ |AF|=\frac{bc}{a+b}$$

بنابراین

$$S_{AFE}=\frac{b^۲c^۲\sin\hat{A}}{۲\,(a+b)(a+c)}=\frac{bc\,S_{ABC}}{(a+b)(a+c)} \qquad (۲)$$

به‌همین ترتیب

$$S_{BDF}=\frac{ac\,S_{ABC}}{(b+c)(a+b)}\ ،\ S_{CED}=\frac{ab\,S_{ABC}}{(a+c)(b+c)} \qquad (۳)$$

به‌این ترتیب، باتوجه به (۱) و (۲) و (۳) به‌دست می‌آید:

$$S_{DEF}=\frac{۲abc\,S_{ABC}}{(a+b)\,(b+c)(a+c)}$$

ازطرف دیگر، با توجه به نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی داریم:

$$(a+b)(a+c)(b+c)\geqslant ۲\sqrt{ab}\cdot ۲\sqrt{ac}\cdot ۲\sqrt{bc}=۸abc$$

بنابراین $S_{DEF}\leqslant\frac{S_{ABC}}{۴}$. علامت برابری، وقتی پیش می‌آیدکه داشته‌باشیم: $a=b=c$، یعنی برای مثلث متساوی‌الاضلاع.

(پایان)